ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 20 JANVIER 1919.

PRÉSIDENCE DE M. LÉON GUIGNARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ASTRONOMIE. — *Sur la réforme du Calendrier.*
Note de M. **H. Deslandres**.

Dans l'avant-dernière séance M. Bigourdan a présenté une Note fort intéressante sur l'amélioration des calendriers julien et grégorien. Il énumère leurs imperfections et réclame immédiatement une répartition meilleure des jours de l'année, répartition qui rende égaux le plus possible les mois et aussi les trimestres.

Or les points énumérés ont été l'objet de propositions et de discussions nombreuses dans les dernières décades. En particulier j'ai soulevé les mêmes questions devant l'Académie elle-même en février 1913, en offrant de les porter devant l'Association internationale des Académies qui devait se réunir la même année à Petrograd. L'offre a été acceptée, et une Note succincte qui résume les améliorations à prévoir a été adoptée par une Commission spéciale nommée à cet effet et par l'Académie elle-même. La Note a été présentée à l'Association internationale le 17 mai 1913 et retenue par elle. Les mesures suivantes ont été votées [14 voix pour, 1 voix contre et 4 abstentions (1)] :

---

(1) Le représentant de la Hollande a voté contre. Se sont abstenus les délégués de l'Italie, du Danemark et des Universités de Leipzig et Göttingue.

Le milieu russe n'était pas favorable pour un examen large de la question. Le procureur du Saint-Synode, que j'ai été voir dès mon arrivée à Petrograd, m'a déclaré

« L'Association internationale des Académies décide la création d'une Commission internationale du Calendrier, chargée d'étudier les questions relatives à l'unification et à la simplification des calendriers et à la fixité de la fête de Pâques. Les membres de cette Commission seront désignés par chacune des Académies associées, à raison de deux par Académie, sans qu'ils lui appartiennent nécessairement, conformément à l'article 18 des Statuts. La Commission du Calendrier, dont le Président sera de l'Académie directrice pendant la période (1914-1916), fera un rapport sur ses travaux à la prochaine session de l'Association internationale, après s'être mise en relations, si elle le juge utile, avec les autorités ecclésiastiques intéressées. »

L'Académie directrice dans la période 1914-1916 était l'Académie de Berlin, et la guerre a empêché l'exécution des mesures prises.

Pendant la même année 1913, le 29 mars, au Congrès international de Géographie à Rome, notre confrère M. Lallemand et M. Lecointe, correspondant de notre Académie, ont mis incidemment sur le tapis la réforme du calendrier et ont provoqué une discussion fort intéressante.

En juin 1913, à Bruxelles, le Congrès mondial des Associations internationales a, dans un vœu spécial, réclamé l'intervention des gouvernements pour le choix d'un calendrier universel.

Les chambres de commerce ont apporté aussi leurs vœux et leur concours. Le 4e Congrès international des Chambres de commerce, et des Associations commerciales et industrielles, réuni à Londres en 1910, le 5e Congrès tenu à Boston en 1912, le 6e réuni à Paris en 1914, ont fait ressortir les grands avantages d'un calendrier simplifié pour toutes les transactions, et proposé son adoption par une conférence diplomatique internationale.

Enfin, en 1914, un Congrès international pour la réforme du Calendrier, s'est réuni à Liége, et, entrant dans le vif de la question, a émis le vœu que le nouveau calendrier soit perpétuel, et assure une concordance invariable entre les jours et les dates de l'année.

Dans les quatre années qui ont précédé la guerre, le problème du calendrier a été attaqué de tous les côtés et porté sur le terrain international. Or les solutions proposées se sont toutes rapprochées, au moins en

---

qu'il était personnellement partisan de la réforme, mais que le peuple et le clergé russes des campagnes ne l'accepteraient pas. Depuis la révolution, les choses ont changé; les Russes ont adopté le calendrier grégorien, ou même, paraît-il, tout récemment, un calendrier plus moderne.

partie, des conclusions d'une enquête antérieure sur la question, qui a été poursuivie avec soin de 1884 à 1887, par la Société astronomique de France, et dans des conditions qu'il est bon de rappeler. En 1884, sir Richard Wallace, et l'abbé Croze, aumônier de la Roquette, ont demandé à M. Flammarion d'organiser un grand concours pour le choix du meilleur calendrier et ont mis à sa disposition une somme de 5000^fr pour la distribution finale de prix.

Le concours a eu lieu, et 50 Mémoires distincts ont été déposés. Après un excellent Rapport de M. Fouché, le premier prix a été décerné, en 1887, à M. Armelin qui réclame :

1° Une année formée de 4 trimestres égaux, et de 1 ou 2 jours supplémentaires. Le trimestre comprend 13 semaines entières avec 91 jours (2 mois de 30 jours et un de 31).

2° La rupture de la continuité de la semaine pour l'intercalation des jours supplémentaires, de manière que les mêmes dates correspondent toujours aux mêmes jours de la semaine.

La plupart des auteurs, et en dernier lieu le Congrès spécial de Liége en 1914, ont adopté les deux améliorations précédentes, en les modifiant seulement de façon légère ([1]).

D'autre part, M. Bigourdan accepte seulement la première amélioration, qui certes sera facilement admise par tous; il rejette la seconde basée sur la rupture de la continuité de la semaine.

Mais la deuxième amélioration est la plus importante et la plus utile; son rejet enlève à la réforme la plus grande partie de sa valeur. Il faut, à mon avis, la maintenir absolument, car elle est seule capable d'assurer un calendrier invariable et perpétuel avec le maximum de commodité et de simplicité. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter un coup d'œil sur le Tableau suivant, qui, établi avec la rupture de la semaine, peut, malgré ses dimensions restreintes, remplacer tous les calendriers, variables d'une année à l'autre.

([1]) Ces deux améliorations avaient été déjà indiquées auparavant; mais, dans cette Note, je n'ai pas recherché les tout premiers auteurs qui ont eu les idées principales; j'ai relevé surtout les discussions publiques sur la question, soulevées pendant les cinquante dernières années dans les sociétés savantes et les congrès internationaux, et en insistant sur les études poursuivies en France.

Projet de calendrier perpétuel invariable.

1er semestre.	1er trimestre......	Janvier.	Février.	Mars.
	2e trimestre......	Avril.	Mai.	Juin.
Jour de paix.				
2e semestre.	3e trimestre......	Juillet.	Août.	Septembre.
	4e trimestre......	Octobre.	Novembre.	Décembre.
Jour en plus (année bissextile).				

Trimestre invariable.	Lundi........	1	8	15	22	29		6	13	20	27		4	11	18	25
	Mardi.........	2	9	16	23	30		7	14	21	28		5	12	19	26
	Mercredi......	3	10	17	24		1	8	15	22	29		6	13	20	27
	Jeudi.........	4	11	18	25		2	9	16	23	30		7	14	21	28
	Vendredi......	5	12	19	26		3	10	17	24		1	8	15	22	29
	Samedi.......	6	13	20	27		4	11	18	25		2	9	16	23	30
	Dimanche.....	7	14	21	28		5	12	19	26		3	10	17	24	31

Dans ce calendrier, l'année normale de 365 jours comprend deux semestres identiques de 182 jours séparés par un jour intermédiaire non daté, placé en dehors de la semaine et appelé, par exemple, *Jour de paix* ou *Peace day*.

Les quatre trimestres de l'année et les trimestres de toutes les années sont identiques et comprennent chacun 13 semaines entières et 91 jours ([1]).

Dans les années bissextiles, on ajoute à la fin de l'année un deuxième jour supplémentaire, placé aussi hors semaine et appelé *Jour en plus* ou *Leap day* ([2]).

Le 1er, le 15 et le 30 de chaque mois, consacrés aux paiements, ne tombent jamais un dimanche; par contre, le 31, qui clôture le trimestre, est toujours un dimanche et s'allie très bien avec le jour supplémentaire qui le suit une fois sur quatre ou sur deux et est appelé à devenir un jour de fête.

([1]) Le mois de 31 jours est ici le troisième mois du trimestre, ainsi que dans les projets de MM. Flammarion, Grosclaude, Philip, Armand Baar, etc. Dans les projets de MM. Armelin, Hénin, Bigourdan, etc., le mois de 31 jours est, au contraire, le premier mois.

([2]) Dans le Tableau, le 2e jour supplémentaire est à la fin de l'année; il est naturel, *a priori*, de placer le jour en plus après tous les autres. Tout compte fait, il semble meilleur de le mettre au commencement de l'année. Chaque jour supplémentaire devra, pour les dépenses qui lui sont propres, être rattaché à un mois et à un trimestre, et, comme il faut éviter les mois de 32 jours, on est conduit à rattacher le jour de paix au mois de juillet et le jour en plus de l'année bissextile au mois de janvier.

Ce calendrier, très simple, se grave facilement dans la mémoire; il permet de calculer immédiatement la date d'un jour de la semaine ou le jour de la semaine qui correspond à une date donnée. Il assurera à tous les hommes une économie de pensée, ainsi que je l'écrivais dans ma Note de 1913.

Les avantages sont de beaucoup supérieurs aux inconvénients signalés. Des obstacles d'ordre religieux sont à prévoir, mais ils ne sont pas insurmontables; et la gêne imposée aux quelques personnes qui vérifient les dates est peu de chose à côté des facilités multiples assurées à l'humanité tout entière.

Une troisième amélioration moins importante, mais non négligeable, est un déplacement de l'origine de l'année qui mette les quatre trimestres en meilleur accord avec les saisons astronomiques (1). Le premier jour de l'an, pour des raisons diverses, a beaucoup varié depuis le début de l'ère chrétienne (2); il sera bon de lui donner une base astronomique et de le faire coïncider avec un solstice ou un équinoxe. M. Flammarion a proposé l'équinoxe du printemps, et M. Hétier, pour des raisons spéciales, l'équinoxe d'automne ou même le 1er septembre. A mon avis, l'origine la meilleure est le solstice d'hiver (22 décembre actuel), qui est le point de départ des jours de durée croissante dans notre hémisphère, et le commencement d'un nouveau cycle de la végétation. D'autre part, le minimum de température ne coïncide pas avec le solstice qui est le jour du minimum d'éclairement et lui est postérieur de 25 jours environ sous nos latitudes; c'est pourquoi l'hiver astronomique est pour nous la saison la plus froide.

La fixité de la fête de Pâques est aussi désirable, et l'on a proposé le deuxième ou le troisième dimanche après l'équinoxe de printemps; mais un accord préalable avec les autorités religieuses est nécessaire. Cette amélioration peut être ajournée et décidée après les trois précédentes.

En résumé la question est bien mûre et prête pour une décision définitive. Jusqu'à présent elle a été examinée seulement par des congrès

(1) Les saisons astronomiques sont inégales (de 89 jours à $93^{j},6$); pratiquement, elles seraient confondues avec les trimestres qui sont égaux ou égaux à un jour près, en tenant compte des jours supplémentaires.

(2) Le premier jour de l'an, fixé au 1er janvier par Jules César, pour des raisons accessoires, a été placé par Charlemagne à Noël; plus tard, il a été reporté à Pâques. Dans le calendrier républicain, il était à l'équinoxe d'automne.

internationaux rattachés à des groupements spéciaux (hommes de science, commerçants, etc.); mais elle est d'ordre absolument général et intéresse tous les hommes. Il convient de la porter devant l'Association internationale des Gouvernements, autrement dit devant la Société des Nations qui se constitue à l'heure actuelle.

A mon avis, l'Académie fera œuvre utile en la prenant sous son patronage et en la recommandant aux grandes réunions internationales qui s'organisent actuellement à Paris pour l'établissement d'une paix durable entre les peuples. Si l'on remonte dans le passé, les variations successives du calendrier ont coïncidé avec les grands événements de l'histoire; le moment paraît propice pour la solution du problème, complète et définitive.

RAPPORTS.

Rapport sommaire présenté par M. **Appell** *au nom de la Commission de Balistique.*

La Commission de Balistique a reçu les travaux suivants :

1° De M. **G. Claude** une Note intitulée : *Sur une application nouvelle de la viscosité.* (Reçue le 23 décembre 1918.)

2° De M. **René Garnier**, trois Notes intitulées : (*a*) *Sur la courbe lieu des points à courbure maximum d'une famille de trajectoires balistiques;* (*b*) *Sur une relation entre l'ordre de contact de deux trajectoires et celui de leurs hodographes ;* (*c*) *Sur le point de contact d'une trajectoire balistique avec la courbe de sûreté.* (Reçues le 29 décembre 1918.)

3° De M. **L. Dunoyer**, un Mémoire intitulé : *Balistique expérimentale; méthode photographique pour la détermination complète des trajectoires.* (Reçu le 20 janvier 1919.)

PLIS CACHETÉS.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur le nombre minimum de spiraux associés.* Note de M. **Jules Andrade** [1].

L'objet de cette Note est de compléter, au point de vue des applications pratiques (appareils chronométriques ou balances de précision), les propriétés des spiraux associés que j'ai signalées, en 1911 et 1913, dans diverses Notes résumant mes premières recherches sur cette question.

I. Au point de vue de la réalisation que l'on peut demander à une fabrique de spiraux, il convient *de limiter le montage de spiraux associés actionnant un même solide oscillant à des assemblages de ressorts égaux ou symétriques*. Avec de tels spiraux, en nombre suffisant, on peut toujours, par la simple variation des modes d'ajustage, obtenir séparés ou combinés les effets mécaniques suivants :

1° Production sur un solide oscillant d'un couple pur dont le plan est rigoureusement perpendiculaire à l'axe d'oscillation, c'est-à-dire suppression — non seulement de toute pression transverse de cet axe, *mais encore de toute pression longitudinale dudit axe.*

2° Production sur un solide oscillant d'un couple pur dont l'intensité est proportionnelle à l'angle d'oscillation, quelle que soit la grandeur de ce dernier, et avec une précision constante qui peut atteindre le $\frac{1}{400000}$ et même *le millionième*.

II. L'organe mécanique qui assure le premier effet est un ensemble de ressorts convenablement ajustés, — au nombre de deux si l'on ne veut supprimer que la pression transverse, mais au nombre de quatre si l'on veut supprimer *en outre* la pression longitudinale de cet axe.

Ce *quadruple* comprend à la fois deux couples *alternés* de deux types différents :

---

(1) Contenu d'un pli cacheté ouvert dans la séance du 6 janvier 1919.

Type a : formé de deux ressorts cylindriques de dimensions égales mais symétriques; les attaches mobiles (viroles) de ces deux ressorts sont *opposées*, c'est-à-dire que le segment de jonction de ces viroles coupe en son propre milieu et à angle droit l'axe indéfini de l'oscillation.

Type b : second couple alterné, *mais dont les viroles sont situées sur une même parallèle à l'axe d'oscillation.*

Quatre ressorts donnés, S, S′, T et T′, peuvent constituer à la fois deux types a et deux types b :

S et S′ formant un couple alterné a, T et T′ formant un couple alterné a;
S et T formant un couple alterné b, S′ et T′ formant un couple alterné b;

pourvu que, sur chacun des quatre ressorts considérés parcourus chacun depuis son piton vers sa virole, les sens d'enroulement soient concordants, en sorte que ces quatre ressorts attelés au même solide oscillant s'ouvrent ou se ferment tous ensemble.

La composition des forces transmises par les viroles de ce *quadruple* au solide oscillant peut être étudiée :

$$\text{soit sur le groupement } \begin{cases} S \\ S' \end{cases}, \quad \begin{cases} T \\ T' \end{cases};$$

$$\text{soit sur le groupement } \overset{\frown}{ST}, \quad \overset{\frown}{S'T'}.$$

Le premier groupement démontre que l'axe n'éprouve pas de pression transverse, le second groupement démontre que *l'axe n'éprouve pas de pression longitudinale*. C'est bien la propriété mécanique annoncée comme caractéristique d'un *quadruple*.

III. Le sens d'enroulement sur un ressort change évidemment quand on y permute les rôles du piton et de la virole, ce sens droit ou gauche caractérise *l'orientation du quadruple*.

Dès lors, choisissons huit ressorts identiques ou symétriques associés *en deux quadruples* Q_1 et Q_2, *d'orientations opposées*, mais en ajoutant cette fois, *comme condition nouvelle*, que chaque ressort aura une même étendue angulaire égale à un même multiple impair de quarts de tour, soit en radians

$$p = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad (n \text{ entier}).$$

En appliquant à cet assemblage la méthode de calcul Résal-Caspari, déjà

appliquée dans ma Note de 1911, nous trouverons que l'intensité du couple pur transmis au solide oscillant, après avoir décrit l'angle u à partir de la position d'équilibre unique du solide, en laquelle chaque ressort est isolément désarmé, se calcule en fonction du moment élastique m, commun à nos huit ressorts par le produit

$$-8mu\left(1+\frac{4}{p^2}\right).$$

Ce résultat, quel que soit u, reste exact avec une approximation relative de l'ordre de $\frac{1}{p^3}$; or, pour des spiraux cylindriques de 12 tours plus $\frac{1}{4}$ de tour, la fraction $\frac{1}{p^3}$ est moindre que $\frac{1}{350000}$; l'approximation du millionième sera donc certainement réalisable.

IV. Si l'on veut se servir d'une balance de précision avec un simple quadruple, *on devra avoir la précaution de construire une table de correction*, car le moment transmis au solide oscillant par un simple quadruple aurait la valeur suivante :

$$-4mu\left(1+\frac{4}{p^2}\right)+\frac{4mu}{p^2}[4\cos(p+u)-2u\sin(p+u)];$$

dans cette formule, la première puissance p de l'étendue angulaire est une quantité susceptible de signe; p a en effet le signe de l'orientation du quadruple.

CORRESPONDANCE.

M. B. Baillaud adresse un Rapport relatif à l'emploi qu'il a fait de la subvention qui lui a été accordée, sur la *Fondation Loutreuil*, en 1916.

M. Gustave André prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante, dans la Section d'Economie rurale, par le décès de M. *A. Müntz*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires.* Note de M. RENÉ GARNIER.

Je me propose d'étendre aux équations différentielles linéaires *d'ordre quelconque* les résultats que j'ai fait connaître antérieurement (¹) à propos des singularités irrégulières des équations linéaires du second ordre. Une telle extension se heurte d'ailleurs à plus d'un obstacle, ainsi qu'il arrive fréquemment lorsqu'on quitte le champ linéaire du second ordre. Mais, dans l'ensemble, on peut toujours affirmer que, *si l'on envisage une équation linéaire* $(\overline{\mathrm{E}})$, *d'ordre* $m > 2$, *possédant un point irrégulier* $x = \infty$, *de rang* n, *comme cas-limite d'une équation* (E) *pourvue de* $n + 1$ *singularités régulières* ($x = \infty$, et n points x_h très éloignés), *les propriétés fondamentales des intégrales de* (E) (existence d'intégrales canoniques, invariants du groupe de monodromie, ligne de zéros) *se retrouvent à la limite dans des propriétés analogues des intégrales de* $(\overline{\mathrm{E}})$.

1. Soit donc l'équation d'ordre m :

$$(\overline{\mathrm{E}}) \qquad y^{(m)} + \mathrm{A}_1 y^{(m-1)} + \ldots + \mathrm{A}_j y^{(m-j)} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} y' + \mathrm{A}_m y = 0,$$

où les quotients $\mathrm{A}_j : x^{j(n-1)}$ sont holomorphes à l'extérieur d'un cercle $\Gamma(|x| = r_0)$; ainsi, $x = \infty$ est pour $(\overline{\mathrm{E}})$ un point irrégulier de rang n. Au lieu de considérer $(\overline{\mathrm{E}})$ comme provenant d'une équation possédant un point régulier, voisin d'un point de rang $n - 1$, nous allons, cette fois, envisager directement une équation

$$(\mathrm{E}) \qquad (1 - \varepsilon^n x^n)^m y^{(m)} + \ldots + (1 - \varepsilon^n x^n)^{m-j} \mathrm{A}_j y^{(m-j)} + \ldots + \mathrm{A}_m y = 0,$$

qui, pour $|\varepsilon|$ assez petit, possédera hors de Γ $n + 1$ points réguliers, $x = \infty$ et $x_h = \varepsilon^{-1} e^{\frac{2\pi i h}{n}}$ $(h = 1, \ldots, n)$. Soit a_j le coefficient de $x^{j(n-1)}$ dans A_j; *nous supposerons d'abord que l'équation*

$$f(s) \equiv s^m + a_1 s^{m-1} + \ldots + a_{m-1} s + a_m = 0$$

possède m *racines distinctes* $s_1, \ldots, s_m$. On montre alors qu'on peut former

(¹) Voir notamment *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 265, et t. 166, 1918, p. 103 et 602.

m expressions

$$\varpi_k(x, \varepsilon) = \alpha_{n-1}^k(\varepsilon) x^{n-1} + \ldots + \alpha_0^k(\varepsilon) + \alpha_{-1}^k(\varepsilon) x^{-1}, \qquad [\alpha_{n-1}^k(0) = s_k]$$

(les α étant holomorphes en ε pour $\varepsilon = 0$), telles que si l'on pose

$$\operatorname{Log} u_k(x) = \int (1 - \varepsilon^n x^n)^{-1} \varpi_k \, dx \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

l'équation (E) puisse s'écrire

$$(\mathrm{E}') \quad (1 - \varepsilon^n x^n)^m y^{(m)} + \sum_{=1}^{m} (1 - \varepsilon^n x^n)^{m-j} \mathrm{B}_j y^{(m-j)} = x^{-2} \sum_{j=1}^{m} (1 - \varepsilon^n x^n)^{m-j-1} \mathrm{C}_j y^{(m-j)},$$

les quotients $\mathrm{B}_j : x^{j(n-1)}$ et $\mathrm{C}_j : x^{(j-1)(n-1)}$ étant réguliers hors de Γ, et le premier membre égalé à zéro admettant les u_k comme intégrales. Dès lors, il est tout indiqué d'intégrer (E′) par approximations successives; on posera ainsi de proche en proche :

$$(1) \quad \begin{cases} y_0(x) = u_k(x), \\ y_{\nu+1}(x) = u_k(x) + \displaystyle\sum_{g=1}^{m} \int_{(\mathcal{L}_g^h)}^{x} \mathrm{R}_g(\xi) \frac{u_g(x)}{u_g(\xi)} \varphi[y_\nu(\xi), \xi] \frac{d\xi}{\xi^2}, \end{cases}$$

en désignant par $x^{-2}\varphi[y(x), y]$ le second membre de (E′), et par $\mathrm{R}_g(x)$ une expression formée au moyen des ϖ_l et holomorphe hors de Γ. On démontre enfin que les approximations convergent régulièrement vers une fonction limite $\mathrm{Y}_k(x)$, si $|x|$ est pris suffisamment grand (indépendamment de ε) et si l'on adopte pour chemin d'intégration $(\mathcal{L}_g^h)$, l'une, $(\mathcal{L}^h)$, des m branches de la courbe

$$(\mathrm{H}) \qquad \mathcal{R}\{e^{i\delta} \varepsilon^{-n} \operatorname{Log}(1 - \varepsilon^n \xi^n)\} = \mathrm{C},$$

où δ et C ont été choisis convenablement; d'une façon plus précise, $(\mathcal{L}_g^h)$ désignera la branche précédente, parcourue dans un sens bien déterminé, *qui pourra varier avec l'indice g* : c'est là une circonstance *qui n'avait pas d'analogue pour les équations du second ordre.* Observons enfin que chacune des m branches de H s'enroule autour des deux points x_h et ∞, l'arc intermédiaire [1] tendant uniformément vers l'une des branches de

$$(\overline{\mathrm{H}}) \qquad r^n \cos(n\theta + \delta) = \mathrm{C}.$$

---

[1] On entend par là les points x tels que $r_1 < |x| < r_2$ (r_1 et r_2 indépendants de ε).

2. Pour interpréter les résultats précédents, supposons d'abord que *les racines* s_k *de* $f(s) = 0$ *forment un polygone convexe* Π (ce qui est le seul cas possible pour $m = 2$); on établit alors qu'on peut adopter *le même sens de parcours* sur les $(\mathfrak{L}_g^h)$ (δ ayant été convenablement choisi); et les fonctions-limites Y_k ne seront autres que des intégrales *canoniques* relatives au point x_h [correspondant à $(\mathfrak{L}^h)$] et à $x = \infty$. D'ailleurs, ε tendant vers zéro, ces intégrales, dont le nombre est mn, tendent (¹) vers des intégrales de $(\overline{\mathrm{E}})$ que nous appellerons encore *normales*, et qu'on obtiendrait directement en appliquant à $(\overline{\mathrm{E}})$ un algorithme analogue au précédent, le long de la branche correspondante de $(\overline{\mathrm{H}})$. Je montre enfin que la convergence reste assurée si l'on fait croître C indéfiniment à partir d'une certaine valeur C_0, et si l'on fait varier δ à l'intérieur d'un des deux angles opposés, d'ouverture V_k, extérieurs à Π en s_k. Dans chaque cas, la branche $(\mathfrak{L}^h)$ — et à la limite $(\overline{\mathfrak{L}^h})$ — balaieront un certain domaine en tout point duquel on connaîtra la valeur d'une intégrale bien déterminée de (E) et de $(\overline{\mathrm{E}})$. Or ces deux domaines empiètent l'un sur l'autre, et *les deux intégrales correspondantes coïncident dans le domaine commun*. On se trouve ainsi avoir défini une intégrale unique, dans un secteur d'amplitude $2\pi + V_k : n$; et, par suite, on peut déterminer pour $(\overline{\mathrm{E}})$, par exemple, hors de Γ, *mn secteurs illimités à l'intérieur de chacun desquels on sait calculer* $m+1$ *intégrales normales de* $(\overline{\mathrm{E}})$, qui sont des traces d'intégrales canoniques de (E) : fait assurément bien remarquable.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le prolongement analytique des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires*. Note de M. **Riquier**, présentée par M. P. Appell.

I. Désignant par $x, y, \ldots$ des variables indépendantes en nombre quelconque, et les supposant, indifféremment, réelles ou imaginaires, nous commencerons par poser, relativement à la nature des régions que l'on peut être conduit à considérer dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$, les définitions suivantes :

Si l'on considère, d'une part, une région déterminée, d'autre part, un

(¹) La convergence étant uniforme pour $r_1 < |x| < r_2$.

point déterminé étranger à la région, il arrive nécessairement de deux choses l'une : ou bien ce point est le centre de quelque domaine [1] entièrement étranger à la région, ou bien il n'est le centre d'aucun domaine de cette espèce; nous dirons, dans le second cas, qu'il est *semi-extérieur* à la région.

Cela posé, soit R une région jouissant de la propriété que nous allons énoncer :

« Il existe qnelque suite indéfinie de régions,

$$R', R'', \ldots, R^{(m)}, \ldots,$$

telle : 1° que, pour toute valeur de m, la région $R^{(m)}$ soit *normale* [2], limitée et entièrement comprise dans R; 2° que, pour toute valeur de m, la région obtenue par l'adjonction à $R^{(m)}$ des points semi-extérieurs à $R^{(m)}$ soit entièrement comprise dans $R^{(m+1)}$; 3° que tout point de R finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être compris dans $R^{(m)}$. »

Nous exprimerons d'une façou abrégée cet ensemble de conditions en disant que la région R est une *limite de région normale et limitée*.

Les mêmes choses étant posées, si, de plus, la région variable $R^{(m)}$ est *monodromique* [3] quel que soit m, nous dirons que la région R est une *limite de région normale, limitée et monodromique*.

II. Considérons un système différentiel d'ordre quelconque où se trouvent engagées, avec un nombre quelconque de variables indépendantes, $x, y, \ldots$, un nombre également quelconque de fonctions inconnues, $u, v, \ldots$; et à chacune des inconnues $u, v, \ldots$ faisons correspondre un entier algébrique déterminé que nous nommerons la *cote* de cette inconnue. Considérant ensuite une dérivée quelconque de l'une des inconnues, nommons *cote* de la dérivée en question l'entier algébrique obtenu en ajoutant à la cote de la fonction l'ordre total de la dérivée. Cela étant, nous supposerons tout d'abord que, moyennant un choix convenable des cotes respectivement

---

(1) Voir l'Ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, p. 52.

(2) *Ibid.*, p. 70.

(3) *Ibid.*, p. 103 et suiv.

attribuées à u, v, ..., le système différentiel dont il s'agit remplit à la fois les deux conditions suivantes : 1° il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres ; 2° chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote tombe au-dessous de celle du premier membre correspondant ([1]).

Désignons actuellement par S un système différentiel possédant la triple propriété : 1° *d'appartenir à l'espèce ci-dessus définie ; 2° d'être complètement intégrable ; 3° d'être linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées*. Dans ce système, fixons l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales ordinaires ([2]) et construisons un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes, et les colonnes aux fonctions arbitraires qui figurent dans les conditions initiales ; puis, dans l'une quelconque de ces colonnes, noircissons à l'aide de hachures les cases des diverses variables dont ne dépend pas la fonction arbitraire correspondante. En répétant cette opération successivement dans toutes les colonnes, nous obtiendrons une sorte de damier où les cases blanches et noires pourront offrir des dispositions relatives variables. Finalement, partageons les variables indépendantes en groupes, suivant que, dans le Tableau ainsi construit, les lignes offrent ou n'offrent pas la même disposition de cases blanches ou noires. En supposant, par exemple, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t, et sept fonctions arbitraires,

$$(1)\quad F_1(t),\ F_2(x,t),\ F_3(z,s,t),\ F_4(x,z,s,t),\ F_5(y,t),\ F_6(x,y,t),\ F_7(y,z,s,t),$$

la considération d'un pareil Tableau nous conduira à partager les variables indépendantes en quatre groupes comprenant : le premier la variable x, le deuxième la variable y, le troisième les variables z et s, le quatrième la variable t : ce dernier groupe correspond aux lignes du Tableau *entièrement dépourvues de cases noires*. Extrayons alors des espaces $[[x]]$, $[[y]]$, $[[z,s]]$, $[[t]]$ les régions respectives R_x, R_y, $R_{z,s}$, R_t, chacune des trois premières étant une *limite de région normale, limitée et monodromique*, la dernière une *limite de région normale et limitée*.

([1]) De pareils systèmes constituent un cas très particulier de ceux que j'ai nommés *orthonomes* (*loc. cit.*, Chap. VII).

([2]) *Loc. cit.*, p. 169 et suiv.

Cela posé, *si, d'une part, les coefficients du système* S *sont des fonctions analytiques et régulières dans la région*

(2) $$(R_x,\ R_y,\ R_{z,s},\ R_t);$$

si, d'autre part, on a choisi pour les arbitraires (1) *des fonctions analytiques et régulières dans les régions respectives*

$$R_t,\ (R_x, R_t),\ (R_{z,s}, R_t),\ (R_x, R_{z,s}, R_t),\ (R_y, R_t),\ (R_x, R_y, R_t),\ (R_y, R_{z,s}, R_t),$$

les intégrales correspondantes ne peuvent manquer d'être elles-mêmes analytiques et régulières dans la région (2) [1].

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques problèmes relatifs à l'itération des fractions rationnelles.* Note de M. **Gaston Julia**, présentée par M. Georges Humbert.

I. Dans ma Note du 28 janvier 1918, j'ai laissé en suspens la question de savoir si, pour une substitution rationnelle $z_1 = R(z)$, un point invariant $\zeta = R(\zeta)$ où l'on aurait $R'(\zeta) = e^{i\theta}$, θ étant incommensurable à 2π, pouvait être un *centre*. Je suis en mesure aujourd'hui de trancher cette question par la négative : *pour une substitution rationnelle, il n'y a pas de centre, tout point* $\zeta = R(\zeta)$ *où* $|R'(\zeta)| = 1$ *est un point de l'ensemble parfait que j'ai appelé* E'.

On sait que tout point $\zeta = R(\zeta)$ où $R'(\zeta) = e^{i\theta}$, θ commensurable à 2π, est un point de E', les R_n n'y sont pas normales, ζ est point-limite pour les conséquents d'un point critique de la branche de la fonction inverse de $R(z)$ qui prend la valeur ζ en ζ; et cette dernière propriété *équivaut à dire que* ζ *est de* E' : car si ζ n'était pas de E', on démontre aisément que l'on pourrait trouver une solution de l'équation de Schrœder $\psi(z_1) = e^{i\theta}\psi(z)$, nulle en ζ, holomorphe autour de ζ. ζ serait un centre, il ne serait point limite de conséquents pour *aucun point du plan*. Inversement, si ζ n'était pas point-limite de points critiques des branches des fonctions inverses des R_n qui sont égales à ζ en ζ, on démontrerait encore l'existence de la solution holomorphe de l'équation précédente et l'on en conclurait que ζ n'est pas de E'.

---

[1] Les systèmes tels que S et le calcul par cheminement de leurs intégrales ont fait, il y a quelques années, l'objet d'une première Note, dans laquelle aucune conclusion relative à la monodromie éventuelle des intégrales ne se trouvait formulée (*Comptes rendus*, t. 133, 1901, p. 1187).

Par les mêmes raisonnements, si θ est incommensurable à 2π, on démontre que : 1° ou bien ζ n'est pas de E', alors c'est un centre et dans un cercle C assez petit de centre ζ il n'y a aucun conséquent de point critique de la fonction inverse de $R(z)$. Les fonctions inverses de toutes les $R_n(z)$ ont chacune une branche égale à ζ en ζ, holomorphe dans C. ζ est entouré de courbes analytiques fermées qui se transforment en elles-mêmes biunivoquement par $z_1 = R(z)$, ainsi que les aires qu'elles délimitent.

2° Ou bien ζ est de E', et dans tout voisinage de ζ une branche, égale à ζ en ζ, d'une inverse de $R_n(z)$ pour n convenable, a un point critique au moins, c'est-à-dire que ζ est point-limite pour les conséquents d'un point critique de la branche de la fonction inverse de $R(z)$ qui est égale à ζ en ζ.

Or la première hypothèse est impossible. On peut en effet démontrer que, si ζ était centre, l'équation fonctionnelle $\varphi(e^{i\theta}Z) = R[\varphi(Z)]$ qui a une solution $\varphi(Z)$ égale à ζ pour $Z = 0$ et holomorphe autour de $Z = 0$ aurait pour cette solution une fonction *méromorphe dans tout le plan de Z. Tout point z du plan* (¹) aurait tous ses conséquents $z_1, z_2, \ldots$ répartis sur une courbe analytique fermée passant par z (pouvant avoir des points doubles) et partout denses sur cette courbe. Ce fait est contredit par l'existence en infinité dénombrable des racines de $z = R_i(z)$ qui n'ont qu'un nombre fini de conséquents.

II. On peut tirer de là d'importantes conclusions. En effet, si l'on considère une aire D du plan z où ne se trouve aucun point de E', la suite des R_i étant normale dans D, on en peut extraire une suite $R_{n_1}(z), R_{n_2}(z), \ldots$ qui tende, uniformément dans D, vers une constante ou vers une fonction-limite, et j'ai fait observer dans ma Note citée au n° I que la fonction limite ne pouvait différer d'une constante que s'il existait un *centre*, c'est-à-dire un point $\zeta = R_p(\zeta)$ pour lequel $R'_p(\zeta) = e^{i\theta}$ (θ incommensurable à 2π) qui ne fût pas de E'. Cette éventualité étant impossible : *toute fonction limite pour la suite des* R_i *est une constante.* On démontre aisément que si cette constante n'est pas un point de E' c'est nécessairement une racine d'équation $z = R_k(z)$ pour laquelle $|R'_k(z)| < 1$, et l'on a affaire à une *convergence périodique.*

Si cette constante est un point de E', il est encore aisé de démontrer, en supposant que toutes les itérées D_i de D ne sont pas dans des régions distinctes du plan séparées les unes des autres par E' (c'est-à-dire que deux au moins de ces itérées D_n et D_{n+N} sont dans une même région du plan

(¹) Sauf peut-être deux points exceptionnels en plus.

délimitée par E′), que *la constante précédente est nécessairement une racine de* $z = R_N(z)$ [pour laquelle $|R'_N(z)| \geqq 1$].

III. Du fait que toute fonction-limite pour une suite de R_{n_i} est constante, on conclut qu'un point A qui n'appartient pas à E′ ne peut être limite d'antécédents d'un point B (évidemment B ne peut être alors de E′) que si B est limite de conséquents de A, et, par conséquent, si une suite de R_n converge uniformément vers l'affixe de B dans une petite aire entourant A. Mais alors B est un point d'attraction [$z = R_n(z)$, $|R'_n(z)| < 1$] et l'on aboutit à une contradiction car, sans restreindre la généralité, on peut (au besoin en remplaçant A par un de ses conséquents) supposer A dans le domaine restreint de B et l'on sait que les antécédents de B situés dans le domaine restreint de B n'ont pour points limites que les points frontières de ce domaine restreint qui sont *points de* E′. (Si B est un des deux points exceptionnels possibles, tous ses antécédents coïncident avec lui ou avec l'autre point exceptionnel.)

Donc *l'ensemble dérivé de l'ensemble des antécédents de tout point du plan* (excepté les points exceptionnels, s'il y en a) *qui contient tous les points de* E′, *ne contient qu'eux : il est identique à* E′.

Cette proposition ne pouvait être solidement établie que si l'on réussissait à démontrer ce qui est fait en II que toute fonction-limite de la suite des R_i est une constante; sans cela, la possibilité des centres entraînait l'existence de fonctions-limites non constantes et mettait en défaut la proposition précédente. On voit par II et III l'importance de l'impossibilité des centres dans la théorie générale de l'itération des fractions rationnelles.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions de lignes implicites.* Note de M. **Paul Lévy**, présentée par M. Hadamard.

1. M. Hadamard a établi (*Bul. Soc. math.*, 1906) une condition suffisante pour que l'inversion d'une transformation ponctuelle soit possible et uniforme dans tout l'espace. Nous nous proposons d'étendre ce résultat au cas d'une correspondance entre deux fonctions $u(s)$ et $v(s)$, que nous supposerons, pour fixer les idées, définies et uniformes pour $0 < s < 1$, intégrables et de carrés intégrables.

Nous écrirons dans la suite $u(s)$ et $v(s)$ pour désigner les valeurs de ces fonctions pour la valeur particulière s, et simplement u et v pour désigner

les êtres analytiques constitués par l'ensemble des valeurs de ces fonctions. Nous emploierons un langage géométrique en considérant chaque fonction comme représentée par un *point* d'un certain espace idéal. Des fonctions u, v, U, V seront ainsi représentées par des points que nous désignerons par a, b, A, B. La *distance* d de deux points a et A sera définie par la formule

$$(1)\qquad d^2 = \int_0^1 [U(s) - u(s)]^2 ds.$$

Si la fonction U varie de manière que cette quantité tende vers zéro, nous dirons qu'elle a pour *limite* u, bien qu'il puisse y avoir des valeurs de s (formant un ensemble de mesure nulle) pour lesquelles $U(s)$ ne tende pas vers $u(s)$.

Des définitions précédentes résultent celles des expressions *sphère*, *ligne continue*, *longueur d'une ligne*. On peut démontrer que si la fonction U varie de manière que A décrive un chemin de longueur finie, elle a une limite, ce qu'on peut exprimer en disant que A a une limite.

2. Considérons maintenant entre les fonctions U et V, ou ce qui revient au même entre les points A et B, une correspondance vérifiant les conditions suivantes :

a. *La fonction* V *est une fonctionnelle de* U, *uniforme*, *continue*, *et admettant une différentielle*, c'est-à-dire que, u étant donné, on peut trouver une fonctionnelle linéaire $\delta v(s)$ de $\delta u = U - u$, fonction de s, telle que la distance entre les points représentant V et $v + \delta v$ soit, lorsque U tend vers u (et V vers v), infiniment petite par rapport à celle des points a et A.

b. *L'inversion de la correspondance est toujours possible localement*, c'est-à-dire que a étant donné on peut entourer le point correspondant b d'une petite sphère telle qu'inversement à chaque point B intérieur à cette sphère corresponde un point et un seul d'un petit volume entourant a.

Cette condition peut être décomposée en deux, d'une part la possibilité de l'inversion de la correspondance linéaire entre δu et δv, d'autre part, δu étant obtenu, la possibilité d'exprimer U, par exemple par une méthode d'approximations successives. Les travaux de MM. Volterra et Fredholm sur les équations intégrales, et ceux de M. Volterra sur les fonctions de lignes implicites, ont mis en évidence l'importance et la généralité des cas où cette double condition est réalisée.

Lorsque la relation entre δu et δv peut être résolue par rapport à δu, en

ce sens qu'à toute détermination de δv intégrable et de carré intégrable correspond une détermination de δu intégrable et de carré intégrable, on peut démontrer qu'il existe une quantité positive μ indépendante de δv telle que

$$\int_0^1 [\delta v(s)]^2 ds > \mu^2 \int_0^1 [\delta u(s)]^2 ds.$$

c. Lorsque A est intérieur à la sphère de rayon ρ ayant pour centre l'origine (point représentatif de $u = 0$), μ *admet une limite inférieure positive* μ_ρ.

d. *L'intégrale* $\int_0^r \mu_\rho d\rho$ *croît indéfiniment avec* r, d'où il résulte que si A décrit un chemin de longueur infinie, B ne pourra pas décrire un chemin de longueur finie.

Sous ces conditions, l'inversion de la transformation considérée est possible et uniforme dans tout l'espace.

Pour démontrer qu'elle est possible, il suffit de montrer que si B se déplace du point b_0 correspondant à a_0 à un point quelconque b_1 en suivant un chemin de longueur finie, il ne peut exister sur son parcours un point b telle que l'inversion soit possible avant b et impossible après. En effet, si elle est possible avant b, le point A décrit, lorsque B tend vers b, un chemin de longueur finie (condition d), et par suite a une limite (remarque finale du paragraphe 1); mais alors l'inversion est possible un peu au delà de b (condition b).

Pour démontrer que l'inversion est uniforme, il suffit de montrer que si B décrit un contour fermé commençant et finissant en un point b, il est impossible que A décrive une ligne ouverte $a_0 a_1$. Or, s'il en était ainsi, on pourrait déformer le contour décrit par B, sans changer le point b, de manière à le réduire à ce point; le chemin correspondant décrit par A devrait aussi se réduire à un point, ce qui n'est pas possible, car d'après la condition b ses extrémités ne peuvent se détacher des points a_0 et a_1.

3. *Généralisation*. — On peut de bien des manières généraliser le théorème précédent en modifiant les conditions de continuité imposées aux fonctions U et V et la définition de la distance. On peut même envisager que l'on impose à ces fonctions des conditions d'égalité. Ces conditions peuvent n'être pas les mêmes pour la fonction U et la fonction V, et les définitions de la distance peuvent être différentes pour les domaines E

et E′ décrits respectivement par A et B, lorsque ces conditions sont vérifiées.

Si, par exemple, on veut étudier l'inversion de la relation

$$(2) \qquad V(s) = \int_0^s U(s)\,ds,$$

la fonction U étant supposée intégrable et de carré intégrable, il faudra supposer la fonction V continue, admettant une dérivée intégrable et de carré intégrable, et de plus s'annulant pour $s = 0$. Ces conditions sont nécessaires pour que l'inversion soit possible localement, et ensuite le passage du point de vue local au point de vue général est évidemment possible.

Ces généralisations appellent deux remarques :

1° Tandis que dans l'énoncé primitif l'existence de la quantité μ résulte de la condition b, il n'en sera pas toujours ainsi et, en général, l'existence de μ sera une condition de plus à vérifier.

Ainsi dans l'exemple de la correspondance (2), le nombre μ n'existerait pas si l'on conservait la définition (1) de la distance. Il existe au contraire si l'on conserve cette définition dans le domaine E, mais que dans E′ on définisse la distance d' entre b et B par la formule

$$d'^2 = \int_0^1 \left[\frac{dV(s)}{ds} - \frac{dv(s)}{ds}\right]^2 ds.$$

Il arrivera ainsi souvent que l'application du théorème soit possible, à condition d'adopter une définition de la distance adaptée à la correspondance étudiée.

2° Il est essentiel, pour la deuxième partie de la démonstration, de s'assurer que toute ligne fermée décrite par B peut se réduire à un point par une déformation continue. En d'autres termes, le domaine E′ doit être *à connexion linéaire simple*.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur les erreurs de situation d'un point.* Note [1] de M. **Alf Guldberg**.

Dans un Mémoire remarquable Bravais a déduit la loi des erreurs du plan de la forme

$$\frac{\sqrt{k^2 k'^2 - \lambda^2}}{\pi} e^{-k^2x^2 - 2\lambda xy - k'^2y^2},$$

x et y désignant les erreurs sur les coordonnées du point et

$$k^2 = \frac{M(y^2)}{2[M(x^2)M(y^2) - M(xy)^2]}, \quad k'^2 = \frac{M(x^2)}{2[M(x^2)M(y^2) - M(xy)^2]},$$

$$\lambda = \frac{-M(xy)}{2[M(x^2)M(y^2) - M(xy)^2]},$$

$M(x^2)$, $M(y^2)$ et $M(xy)$ désignant respectivement les valeurs moyennes de x^2, y^2 et xy.

Le but de cette Note est de montrer comment la loi de Bravais se déduit immédiatement par la méthode des probabilités continues introduite par M. Bachelier.

Nous supposerons une suite d'observations en nombre très grand des deux coordonnées d'un même point, de telle sorte que la succession de ces observations puisse être considérée comme continue. Nous supposerons encore que les erreurs commises sur les coordonnées du point sont continues.

Soit $\omega(n - dn, x - u, y - v)\,dx\,dy$ la probabilité pour que, à la $(n - dn)^{\text{ième}}$ observation, les erreurs commises soient comprises respectivement entre $x - u$ et $x - u + dx$ et entre $y - v$ et $y - v + dy$; bref, la probabilité pour les erreurs $x - u$ et $y - v$.

Soit encore $\zeta(n, u, v)\,du\,dv$ la probabilité pour que les erreurs augmentent des quantités u et v à la $n^{\text{ième}}$ observation, ayant été $x - u$ et $y - v$ à la $(n - dn)^{\text{ième}}$ observation.

La probabilité, pour que les erreurs soient x et y à la $n^{\text{ième}}$ observation, ayant été $x - u$ et $y - v$ à la $(n - dn)^{\text{ième}}$ observation, s'obtient d'après le

---

[1] Séance du 13 janvier 1919.

principe des probabilités composées

$$\omega(n-dn,\ x-u,\ y-v)\,dx\,dy\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv.$$

Les u et v ayant pu, à la $(n-dn)^{\text{ième}}$ observation, avoir toutes les valeurs possibles, la probabilité pour que, à la $n^{\text{ième}}$ observation, les erreurs soient x et y est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$dx\,dy\int\int\omega(n-dn,\ x-u,\ y-v)\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv.$$

Cette même probabilité s'exprime par $\omega(n, x, y)\,dx\,dy$, on doit donc avoir

$$\omega(n,\ x,\ y)=\int\int\omega(n-dn,\ x-u,\ y-v)\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv.$$

Développons la fonction $\omega(n-dn, x-u, y-v)$ par la formule de Taylor, en négligeant les termes qui contiennent en facteur le carré de dn et les puissances de u et v supérieures à la seconde, on aura alors

$$\begin{aligned}\omega(n,\ x,\ y)=&\left[\omega(n,\ x,\ y)-\frac{\partial\omega}{\partial n}\,dn\right]\int\int\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv\\&-\frac{\partial\omega}{\partial x}\int\int u\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv-\frac{\partial\omega}{\partial y}\int\int v\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\int\int u^2\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv\\&+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\int\int uv\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\int\int v^2\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv.\end{aligned}$$

On a d'abord

$$\int\int\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv=1.$$

L'hypothèse de Bravais exige que les intégrales

$$\int\int u\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv=0,\qquad\int\int v\,\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv=0.$$

Si ces intégrales ne sont pas nulles on peut réduire le cas général par une transformation des variables à ce cas ici traité.

L'intégrale

$$\int\int u^2\zeta(n,\ u,\ v)\,du\,dv$$

est la valeur moyenne des carrés de l'erreur u relative à l'intervalle des observations $n - dn$, n. Nous désignerons cette intégrale par $\frac{1}{2}\varphi_1'(n)\,dn$.

L'intégrale

$$\iint v^2\zeta(n, u, v)\,du\,dv$$

est la valeur moyenne des carrés de l'erreur v relativement à l'intervalle des observations $n - dn$, n. Nous désignerons cette intégrale par $\frac{1}{2}\varphi_2'(n)\,dn$.

Enfin l'intégrale

$$\iint uv\zeta(n, u, v)\,du\,dv$$

est la valeur moyenne des produits de uv relative à l'intervalle des observations $n - dn$, n. Nous désignerons cette intégrale par $\frac{1}{2}\Theta'(n)\,dn$.

Notre équation s'écrit donc

$$\frac{1}{4}\varphi_1'(n)\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\varphi_2'(n)\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\Theta'(n)\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial n}.$$

On a encore la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega(n, x, y)\,dx\,dy = 1.$$

Ces deux équations sont satisfaites, comme on le vérifie, par [1]

$$\omega(n, x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{\varphi_1(n)\varphi_2(n) - \Theta(n)^2}}\,e^{-\frac{\varphi_2(n)x^2+\varphi_1(n)y^2-2\Theta(n)xy}{\varphi_1(n)\varphi_2(n)-\Theta(n)^2}}.$$

On déduit de plus que

$$\varphi_1(n) = 2\mathrm{M}(x^2), \qquad \varphi_2(n) = 2\mathrm{M}(y^2), \qquad \Theta(n) = 2\mathrm{M}(xy).$$

Si l'on pose

$$\frac{\varphi_2(n)}{\varphi_1(n)\varphi_2(n) - \Theta(n)^2} = k^2, \qquad \frac{\varphi_1(n)}{\varphi_1(n)\varphi_2(n) - \Theta(n)^2} = k'^2,$$

$$\frac{-\Theta(n)}{\varphi_1(n)\varphi_2(n) - \Theta(n)^2} = \lambda,$$

on aura la loi de Bravais.

---

[1] Voir Bachelier, *Calcul des probabilités*, p. 387 et suiv.

ÉLASTICITÉ. — *Sur un cas de simplification des formules de M. Boussinesq.* Note de M. **Mesnager**, présentée par M. G. Kœnigs.

Tout paraît avoir été dit sur le problème de M. Boussinesq, après les publications de 1878 et 1885 et les travaux faits depuis à l'étranger pour résoudre ce problème par les méthodes les plus variées ([1]).

Personne ne paraît cependant avoir appelé l'attention sur les remarquables simplifications qui se produisent dans les formules pour les corps dans lesquels le coefficient de Poisson atteint la valeur 0,5, autrement dit $\lambda = \infty$, $\frac{\mu}{\lambda} = 0$, matières à *volume invariable* (alliage de 0,67 d'argent avec 0,33 de platine, caoutchouc, etc.). Pour des applications à des recherches expérimentales, ces simplifications présentent un grand intérêt et, en même temps, les formules de l'élasticité relatives à ces corps montrent des relations très étroites entre les solutions à deux et à trois dimensions.

On sait qu'à deux dimensions, dans le problème du solide limité à une droite, en un point P de laquelle agit une force f normale ou inclinée, les lignes isostatiques sont des circonférences concentriques au point sollicité et des droites passant par ce point. En chaque point M du solide, il n'y a qu'une seule tension principale, qui est dirigée suivant la droite MP, et qui a pour valeur $N = \frac{2f}{\pi r}\cos(\overline{f}, \overline{MP})$. Quelle que soit l'inclinaison du plan sur la force, le résultat reste le même. Les lieux d'égale pression principale sont des circonférences de cercle ayant leur centre sur la direction de la force, qu'on peut voir sous forme de circonférences colorées dans les solides transparents en les plaçant entre deux nicols croisés. Ces circonférences sont indépendantes de la direction de la droite limitant le solide, pourvu que la force f reste constante. (L'expérience vérifie du même coup que les axes passent bien par le point pressé, croix noire déliée passant par ce point.)

Les tensions sont indépendantes de la matière isotrope utilisée.

([1]) Hertz, *Journal de Crelle*, 1881; *Œuvres*, 1895. — Cerruti, *Accademia dei Lincei*, 1882. — Love, *Elasticité*, vol. 1, p. 248. — Michell, *Proceedings London Math. Soc.*, 1899, p. 183. — Lamb, *On Boussinesq problem* (*Proceedings London Math. Soc.*, 1902, p. 276). — Pistohlcors, *Petrograd*, 1916. — Terrazawa, *Cambridge*, 1916.

Les tensions étant nulles sur les droites passant par le point pressé, on peut ajouter ou enlever des coins passant par le point sollicité. Si alors le solide cesse d'être limité par une droite, la formule de la tension devient $A\frac{f}{r}\cos(\overline{a}, \overline{MP})$, la valeur de la constante varie de ∞ à $\frac{1}{\pi}$ quand l'angle du coin restant varie de 0 à 2π. La direction $\overline{a}$ dépend de l'angle de la force avec le plan de symétrie du coin, on la calcule facilement par quadratures.

Il ne faut pas en général que les deux droites limitant la surface de part et d'autre de f se rejoignent. Leurs déformations dépendant en général de la fonction non monodrome $\left(\text{arc tang}\,\frac{x}{z}\right)$ qui varie de 2π quand on fait un tour autour de l'origine, les deux faces ne peuvent se raccorder quand l'angle atteint 2π. Toutefois, dans les matières à volume invariable (le corps étant maintenu à épaisseur constante ou infiniment long dans la troisième direction), la fonction arc tang. disparaît et le raccordement se fait. La tension principale en tout point est alors donnée par $N = \frac{f}{\pi r}\cos(\overline{f}, \overline{MP})$.

Des faits analogues se produisent dans le cas de matière à volume invariable pour les formules à *trois dimensions*. Dans le cas du solide indéfini, du solide limité à un plan, ou du solide limité à un cône quelconque dont le sommet soit au point sollicité, les surfaces isostatiques deviennent des sphères concentriques à ce point et des cônes ayant ce point pour sommet. Les tensions sont nulles sur la surface latérale des cônes, les sphères supportent des tensions normales données par la formule

$$N = A\frac{F}{r^2}\cos(\overline{a}, \overline{MP}).$$

Dans le cas de la surface limitée à un plan, on a

$$N = \frac{2}{3}\frac{F}{\pi r^2}\cos(\overline{F}, \overline{MP}).$$

Les déplacements à la surface sont uniquement normaux à celle-ci si la force est normale. Si la force est oblique, tout se passe pour les tensions et déplacements, dans la partie située au-dessous du plan normal à la force passant par son point d'application, comme dans le cas de la force normale à la surface. La tension est moitié dans le cas du corps infini en tous sens, chaque moitié du corps en équilibrant la moitié.

Dans tous ces cas, les surfaces d'égales tensions principales sont données par l'équation

$$k^4 z^2 = r^6.$$

Elles forment deux groupes symétriques tangents à un même plan. On pourrait, entre deux nicols, apercevoir leurs sections droites, si l'on connaissait une matière transparente à volume invariable.

Les relations que M. Boussinesq avait données ([1]) pour les pressions sur des plans parallèles à la surface s'appliquent à des éléments de direction quelconque et l'on peut dire :

Toute force extérieure, pressant un point P *de la surface plane d'un solide illimité partout ailleurs et de volume invariable, se transmet à l'intérieur sur un élément* M *quelconque sous la forme de pressions (forces par unité d'aire) dirigées suivant* MP *et qui égalent le produit du coefficient* $\frac{3}{2\pi}$ *par la projection, suivant cette direction, de la force extérieure multipliée par le cosinus de l'angle de* MP *avec la normale à l'élément* M *et par l'inverse du carré de la distance* MP.

Si le corps est limité à un plan ou est illimité et qu'il ne soit sollicité à la surface ou à l'intérieur que par des forces appliquées dans un volume fini, on obtient toutes ses tensions par superposition des solutions simples précédentes.

ASTRONOMIE. — *Hypothèse conciliant la Cosmogonie tourbillonnaire avec l'explication des particularités des Novæ et du Soleil.* Note ([2]) de M. **Emile Belot**, présentée par M. Bigourdan.

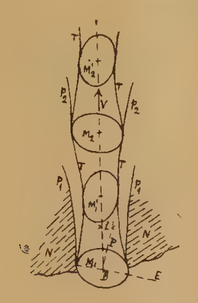
La Cosmogonie tourbillonnaire part de réalités exprimées en nombres dans des lois empiriques (lois des distances et des rotations planétaires) pour remonter à une théorie explicative du système solaire : elle a révélé à son origine l'existence dans la nébuleuse primitive N d'un tube T à renflements périodiques d'où ont émané des nappes planétaires p_1, p_2, ... à section circulaire dont toutes les molécules ayant un mouvement hélicoïdal

---

([1]) *Application des potentiels*, p. 187.

([2]) Séance du 13 janvier 1919.

ont bien le caractère de *surfaces de tourbillon physique*. Les vérifications nombreuses de cette théorie et les calculs qui, par la démonstration des lois empiriques précitées, aboutissent au tracé géométrique de l'architecture du système solaire primitif, subsisteront intégralement grâce à la méthode suivie, même si *le tube* T *n'est que l'enveloppe des positions d'un astre* M *se déplaçant dans la nébuleuse* N.



Les phénomènes des Novæ peuvent aider à comprendre les particularités du système solaire primitif, à condition de préciser le mécanisme de ces apparitions. Jusqu'ici on les a expliquées par le choc d'un Soleil éteint (M) sur une nébuleuse, mais sans définir l'astre M et sans tenir compte des oscillations dans la masse que la Physique prévoit.

Hypothèse. — *L'astre* M *rencontrant en* B *la nébuleuse* N *est une petite nébuleuse gazeuse, sphère de rayon* a, *animée d'une rotation et d'une vitesse relative* V *dans une direction faisant un petit angle* i *avec l'axe polaire* BP.

Dans le système solaire, $a = 0{,}29$ u. a. ou 62 rayons solaires; $i = 28°$. La distance de B au centre de la nébuleuse N = 81 u. a. La vitesse relative V pouvant atteindre plusieurs centaines de kilomètres sera de l'ordre de 100 fois la vitesse parabolique que les masses M et N prendraient par leur attraction mutuelle; par suite, les phénomènes mécaniques dus à la collision domineront certainement ceux que pourrait produire l'attraction (marées, etc.).

On peut distinguer trois cas suivant la valeur du rapport $\frac{R}{g}$ de la résistance R à la pénétration dans la nébuleuse à l'intensité g de la pesanteur à la surface de M.

1° $\frac{R}{g}$ faible. La sphère subira une déformation piriforme progressive et perma-

nente. C'est le cas de la Terre ([1]) déprimée en tête de sa trajectoire et allongée en pointe (Antarctide) en arrière.

2° $\frac{R}{g}$ a une valeur assez grande en raison de la faible densité et du rayon assez grand de l'astre M. Le choc produit dans tout ou partie de la masse gazeuse M des oscillations périodiques amorties, renflant alternativement l'Équateur en M_1 et les pôles en M'_1, mais sans perte de matière par projection équatoriale.

3° $\frac{R}{g}$ augmente encore. Dans ce cas, qui est celui des Novæ, aux oscillations périodiques comme dans le cas 2°, s'ajouteront des expulsions radiales et périodiques de matière dans une zone équatoriale de faible hauteur H sous forme de nappes $p_1, p_2, \ldots$ animées d'une vitesse radiale V_1 et des vitesses de rotation et translation de M.

Si V_2 est la vitesse moyenne d'aplatissement normal à l'Équateur, l'équation de continuité, en négligeant les phénomènes de dilatation et de compression en partie compensés, se réduit à

$$2\pi a^2 V_2 = 2\pi a H V_1.$$

Ainsi la vitesse radiale, proportionnelle à $\frac{a}{H}$ pourra être énorme et atteindre plusieurs milliers de kilomètres comme dans les Novæ. La pression de radiation proportionnelle à la puissance 4 de la température exerce aussi son action radiale sur les molécules condensées des nappes p_1, p_2, ... Comme on le voit sur la figure, le tube T à renflements périodiques, révélé par la Cosmogonie tourbillonnaire, est bien l'enveloppe des positions de l'astre M dans la nébuleuse.

Après l'émission des nappes planétaires p_1, p_2, ..., l'astre M amortira sa vitesse et passera de la phase 3° à la phase 2° où il ne perd plus de matière équatoriale. En même temps, le noyau M se chargeant à la surface de matière nébuleuse N augmentera la durée de sa période d'oscillation, comme on le constate pour un ressort chargé à son extrémité.

Ainsi *la période undécennale du Soleil peut être le résidu de l'oscillation de son noyau primitif*, et les légères variations de cette période tiendraient aux déplacements inévitables des courants dans les couches entourant le noyau ([2]). Le choc oblique (angle i) sur la nébuleuse du corps tournant M,

---

([1]) E. Belot, *Origine des formes de la Terre*, p. 18.

([2]) Il se pourrait aussi qu'aux périodes de minimum d'activité solaire, l'axe polaire du Soleil soit légèrement plus long que le diamètre équatorial, comme les mesures du R. P. Chevalier semblent l'avoir indiqué.

y produit un mouvement de précession faisant tourner l'axe polaire BP autour de la direction de translation V : *l'inclinaison de l'axe solaire sur celui de l'écliptique* (7°) *est dû à ce mouvement de précession.*

Avec la même facilité s'expliquent *les particularités de la courbe de lumière et du spectre des Novæ*. Après une ascension rapide de la courbe de lumière en B, elle présente en général des fluctuations périodiques décroissantes dues à la variation périodique de la surface apparente et de l'intensité du choc nébuleux. Toutefois, si le rayon visuel est incliné d'environ 45° sur l'Équateur, les oscillations périodiques de lumière tendront à disparaître. On ne verra pas de lignes sombres dans le spectre si le rayon visuel est peu incliné sur la direction V. Les nappes $p_1, p_2, \ldots$ seront aussi brillantes que l'astre M au moment où elles s'en séparent, mais dès qu'elles s'en écartent, elles se refroidissent donnant lieu à des *lignes sombres toujours déviées vers le violet*, pourvu que le rayon visuel soit peu incliné sur le plan équatorial. Toutes ces apparences sont bien celles des Novæ et, d'après ce qui précède, il faut supposer que leur plan équatorial diffère peu de celui de la Voie lactée d'où nous observons les phénomènes.

Après une courte période où le spectre est analogue à celui des protubérances solaires, l'astre M_1 s'entourera de matière N qui fait apparaître les raies nébulaires. Enfin l'épanouissement des nappes $p_1, p_2, \ldots$ correspond aux multiples bandes nébuleuses que Ritchey a photographiées autour de la Nova de Persée 1901.

Ainsi la nouvelle hypothèse, en harmonie étroite avec la Cosmogonie tourbillonnaire, précise les relations existant entre les Novæ et le système solaire originel. Enfin, elle peut rendre compte de la formation des nébuleuses spirales quand le choc de M sur la nébuleuse N est latéral (angle i voisin de 90°).

PHYSIQUE. — *Calcul du rapport des chaleurs spécifiques principales du benzène et du cyclohexane par la méthode cyclique de M. Leduc.* Note de M. G. **Déjardin**, présentée par M. E. Bouty.

Dans ses *Leçons sur la Théorie des gaz* Boltzmann compare, dans les cas les plus simples, les valeurs expérimentales du rapport γ des chaleurs spécifiques principales des fluides avec les résultats de la théorie de l'équi-

partition de l'énergie [1]. Il fait observer « qu'il ne serait pas difficile de traiter d'autres cas particuliers, mais que cela semble superflu tant qu'on ne dispose pas de documents expérimentaux plus complets ».

I. Les méthodes de détermination directe du rapport γ sont d'une application très délicate et comportent de nombreuses causes d'erreur [2]. M. Leduc a exposé, dans les *Annales de Physique* (8e série, t. 23, p. 577), les principes d'une méthode de calcul des chaleurs spécifiques des vapeurs qui repose sur la considération d'un cycle parcouru réversiblement par le fluide. Cette méthode fait intervenir la « loi des volumes moléculaires », déjà appliquée avec tant de succès par son auteur à la détermination des masses moléculaires et atomiques, à l'étude des phénomènes de polymérisation et de dissociation [3], au calcul des coefficients de dilatation et à l'étude de la pression interne [4].

Le calcul cyclique de γ exige la connaissance préalable :

1° De la compressibilité de la vapeur entre les limites de température et de pression considérées. Grâce à la loi des volumes moléculaires, et les coordonnées critiques étant supposées connues, il suffit d'exécuter *une seule* expérience, à une température déterminée, entre deux pressions déterminées, d'ailleurs *quelconques*;

2° De la pression maxima F et de sa dérivée $\frac{dF}{dt}$;

3° De la chaleur latente de vaporisation L, que l'on peut calculer par la formule de Clapeyron, le volume spécifique de la vapeur étant lui-même calculé à l'aide des formules de M. Leduc [5];

4° De la chaleur spécifique $\varkappa$ du liquide en fonction de la température.

Après avoir repris, par la méthode statique, la détermination des pressions maxima des vapeurs du benzène et du cyclohexane, j'ai appliqué la méthode de M. Leduc au calcul du γ des vapeurs saturantes de ces carbures et j'ai obtenu les résultats suivants :

---

(1) Boltzmann, *Leçons sur la Théorie des gaz*, t. 2, p. 125.

(2) Leduc, *Annales de Physique*, 9e série, t. 4, 1915, p. 5.

(3) Leduc, *Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. 15, 1898, p. 5, et t. 17, 1899, p. 173; 8e série, t. 19, 1910, p. 442.

(4) Leduc, *Annales de Physique*, 9e série, t. 5, 1916, p. 180, et t. 9, 1918, p. 5.

(5) Leduc, *Comptes rendus*, t. 156, 1913, p. 225.

1° *Benzène.* — A 20°, $\gamma = 1,106$ et à 100°, $\gamma = 1,116$. Ces valeurs paraissent exactes à $\frac{1}{100}$ près et peut-être même à $\frac{1}{200}$.

J'ai utilisé, pour la chaleur de vaporisation L, une formule empirique établie au moyen des valeurs expérimentales de Griffiths et Marshall [1], de Young [2] et des nombres calculés par la formule de Clapeyron [3]. La chaleur spécifique du benzène liquide a été empruntée au travail de Mills et Mac Rae [4].

2° *Cyclohexane.* — γ varie peu entre 20° et 90° et semble voisin de 1,077, valeur probablement exacte à $\frac{1}{100}$ près (la chaleur latente L a été calculée par la formule de Clapeyron et la chaleur spécifique $\varkappa$ déterminée par moi-même).

II. L'énergie totale d'une molécule est la somme de l'énergie potentielle intermoléculaire correspondant aux actions mutuelles des molécules, de l'énergie potentielle intramoléculaire résultant des forces centrales qui maintiennent l'union des groupements atomiques dans la molécule, et enfin de l'énergie cinétique totale du système.

Si l'on considère comme négligeables les forces intermoléculaires (gaz parfait) et si l'on admet, en outre, que les forces intramoléculaires sont proportionnelles aux variations des distances relatives des atomes, l'application du principe d'équipartition permet de mettre le rapport γ des chaleurs spécifiques principales sous la forme

$$(1) \qquad \gamma = 1 + \frac{2}{\mu + \lambda} \quad [5],$$

μ et λ désignant respectivement les nombres de degrés de liberté relatifs à l'énergie cinétique de la molécule et à l'énergie potentielle intramoléculaire. Cette formule ne rend pas compte de la variabilité de γ avec la température et la pression, ce qui tient aux hypothèses restrictives faites, en l'établissant, au sujet des actions inter et intramoléculaires. Néanmoins elle peut per-

---

(1) *Philosophical Magazine*, t. 41, 1896, p. 1.

(2) *Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society* [N. S.], 12.

(3) Les nombres ainsi calculés diffèrent seulement de quelques millièmes des valeurs expérimentales de L correspondant aux mêmes températures.

(4) *Journal of Physical Chemistry*, t. 14, 1910, p. 797.

(5) BOLTZMANN, *Leçons sur la Théorie des gaz*, t. 2, p. 127.

mettre, par comparaison avec le γ calculé par la méthode des cycles, d'étendre et de généraliser les investigations de Boltzmann et de fournir certaines indications relatives au schéma moléculaire propre à caractériser un fluide déterminé.

1° *Benzène.* — Assimilons la molécule de vapeur de benzène à un système de trois sphères polies et indéformables disposées au sommet d'un triangle. Le nombre total $\mu + \lambda$ des degrés de liberté de la molécule est alors égal à 18 (trois variables pour les coordonnées du centre de gravité; trois angles déterminant la rotation de l'ensemble autour du centre de gravité; trois variables pour le mouvement d'agitation propre de chaque sphère, supposé indépendant du mouvement de rotation de l'ensemble; enfin, trois degrés de liberté pour l'énergie potentielle intramoléculaire).

Dans ces conditions, la formule (1) donne $\gamma = 1,111$, nombre très voisin du γ expérimental vers 80°.

On peut rapprocher du schéma précédent la formation du benzène par polymérisation de l'acétylène et la décomposition par l'eau de la triozonide benzénique en trois molécules de glyoxal et trois molécules d'eau oxygénée.

2° *Cyclohexane.* — Assimilons la molécule de ce carbure à un système de trois solides non sphériques, mais de révolution, et correspondant aux trois groupes C^2H^4 (schéma suggéré par l'hydrogénation catalytique du benzène en présence du nickel divisé). Il existerait alors 24 degrés de liberté et la formule (1) donnerait $\gamma = 1,083$. Le nombre de degrés de liberté s'élève à 27 si chacun des trois solides ne possède pas la symétrie parfaite de révolution autour d'un axe. La formule (1) donne, dans ce cas, $\gamma = 1,074$, nombre très peu différent du γ expérimental entre 20° et 90°.

Il ne faut évidemment pas attribuer à ces intéressants rapprochements une valeur exagérée, mais les exemples précédents suffisent pour montrer l'importance de la connaissance exacte du γ des vapeurs au point de vue de l'interprétation de la loi d'équipartition de l'énergie et de la théorie cinétique des gaz. La méthode générale fondée par M. Leduc paraît convenir tout particulièrement pour une étude systématique d'ensemble.

PHYSIQUE. — *Sur une nouvelle détermination de la vitesse du son à l'air libre.* Note de M. **Ernest Esclangon**, présentée par M. R. Bourgeois.

La connaissance aussi exacte que possible de la vitesse du son à *l'air libre* a pris une importance particulière dans l'application au repérage par le son.

Sa détermination précise présente des difficultés qui tiennent essentiellement à l'imparfaite connaissance du vent; la température n'ayant qu'une influence plus faible et plus facile à déterminer exactement.

Le vent, au contraire, est toujours mal déterminé en raison de ses variations continuelles. Quelle que soit son intensité, il se présente sous la forme de *rafales* qui cheminent à la manière de vagues superposées à une translation moyenne d'ensemble. En outre, les mesures de la force du vent dépendent de l'appareil employé. Un anémomètre fixe donne la vitesse moyenne des molécules fluides qui le rencontrent; un ballon sonde fournit plutôt la vitesse moyenne d'une molécule suivie dans son mouvement; dans la propagation du son intervient une intégration spéciale correspondant à la vitesse moyenne des diverses molécules rencontrées successivement par l'onde sonore (c'est une intégration analogue qui se présente dans l'action du vent sur les projectiles). Si le vent était régulier, constant, ces données seraient identiques; à cause de la forme en rafales, elles sont différentes; la différence peut parfois atteindre plusieurs mètres avec des vents très forts.

Lorsque les mesures de la vitesse du son portent sur une petite distance, quelques centaines de mètres par exemple (toutes conditions de précision étant supposées satisfaites par ailleurs) chaque mesure correspond, quant au vent, à des conditions propres, suivant la phase et l'importance de la rafale qui lui correspond, éléments difficiles à connaître. En outre, au *voisinage immédiat* du sol, la vitesse du vent comporte un *gradient très rapide*, irrégulier, indéterminable, provoquant des réfractions, des déviations très fortes du rayon sonore et un allongement inconnu de sa trajectoire.

Si l'on opère sur de grandes distances (15^{km}, 20^{km}, 25^{km}), les rayons sonores peuvent, par une réfraction continue, s'élever assez haut dans l'atmosphère et cheminer dans des couches dont l'état physique est mal déterminé.

Quant aux temps calmes, ils ne sont pas à rechercher. Le voisinage du sol devient alors le siège de petits mouvements de l'air, irréguliers et tourbillonnaires, de varia-

tions thermiques locales, se traduisant finalement par de grandes variations dans les résultats, ainsi que nous l'avons fréquemment constaté à Gâvre.

De toutes façons, dans les mesures déduites des coups de canon, le centre sonore et les postes d'observation étant sur le sol, le voisinage de celui-ci introduit, sur le chemin suivi par les rayons sonores, des irrégularités de vent (même par temps calme) se traduisant par des réfractions latérales ou verticales, par suite par un allongement, souvent non négligeable, du chemin parcouru. En fait, les mesures obtenues par les coups de canon conduisent à des nombres systématiquement plus faibles que ceux obtenus par des méthodes très différentes (tuyaux larges, etc.).

Au cours des années 1917 et 1918, nous avons repris à Gavre, avec notre collaborateur M. Foex, la détermination à l'*air libre* de la vitesse du son, en opérant par tous les temps, même par les plus grand vents, par des températures qui ont varié entre 0 et 20°, enfin avec tous les calibres de canons.

Les ondes étaient reçues sur des récepteurs électro-acoustiques placés en deux postes situés, le premier à 1400^{m} de la batterie, le second, dans le même alignement, à 14000^{m}; leur emplacement exact était connu à quelques décimètres près. Les temps étaient évalués avec une approximation voisine de $\frac{1}{500}$ de seconde. Il était tenu compte des retards propres à chaque récepteur. Le vent enfin était déterminé au moyen des ballons sondes.

Les observations échelonnées de juin 1917 à mars 1918 portent sur 30 séries de coups de canons. Nous les avons divisées en deux groupes. Le premier, comprenant 15 séries, se rapporte aux vents forts et irréguliers allant jusqu'à 18^{m}. Les résultats qu'il donne pour la vitesse du son comportent des écarts très importants allant jusqu'à 3^{m} avec un écart moyen dépassant 1^{m}, bien que les nombres résultant d'une même série (même séance de tir) soient généralement beaucoup plus concordant. C'est là l'indice d'erreurs systématiques mais inconnues commises sur l'influence du vent.

Le deuxième groupe, comprenant également 15 séries, se rapporte à des vents d'apparence régulière, dont la vitesse est comprise entre 0^{m} et 10^{m} (la moyenne est de 6^{m}) et l'orientation quelconque à la ligne des deux postes [1].

Le plus grand écart à la moyenne générale obtenue pour la vitesse du son (corrigée du vent, de la température de l'humidité) est de $0^{m},8$; l'écart moyen se rapportant à plus de 100 observations est de $0^{m},2$.

Nous avons finalement obtenu ainsi pour la vitesse du son (déduite du

---

[1] La moyenne des projections algébriques de la vitesse du vent sur la ligne des postes était de 2^{m}.

second groupe) ramenée à 15° (en air sec) le nombre 339^{m},9 [1]. La vitesse obtenue par Regnault opérant exclusivement en air calme, condition qui ne paraît pas devoir être recherchée particulièrement, est 339^{m},7.

Les calibres qui s'échelonnent entre 14^{cm} et 52^{cm} ne paraissent jouer aucun rôle, du moins à une distance suffisante de la bouche (notre premier poste en était éloigné de 1400^{m}).

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Méthode de réduction rapide du chloroplatinate de potassium.* Note de M. **Horsch**, présentée par M. G. Lemoine.

Dans toutes les méthodes de dosage du potassium par la réduction du chloroplatinate de potassium, on a le platine à l'état de poudre, qu'on doit laver, filtrer, sécher et calciner avec le filtre, opération d'où résulte de la perte de temps et une perte probable de substance.

Nous avons réussi à trouver une méthode nouvelle de réduction du chloroplatinate de potassium, très avantageuse par rapport aux autres jusqu'ici employées, par sa rapidité et sa simplicité, et donnant des résultats très satisfaisants. L'opération se fait comme il suit :

Après un lavage complet avec de l'alcool à 80 pour 100, nous dissolvons le précipité formé, encore humide, sur le filtre même, par l'eau bouillante, et nous recevons le liquide dans un creuset de platine préalablement pesé; nous ajoutons ensuite 2$^{cm^3}$ ou 3$^{cm^3}$ d'alcool, et nous chauffons au bain-marie, qui doit être en pleine ébullition. Après une demi-minute ou une minute, une couche de platine métallique se dépose graduellement et uniformément sur la surface intérieure du creuset et y adhère solidement comme dans le cas d'une électrolyse. En 25 minutes à peu près, la réduction est complète; on ajoute quelques gouttes d'alcool et on laisse encore 5 minutes. On verse ensuite le liquide, on lave bien à l'eau distillée sans craindre des pertes, on

---

(1) La moyenne générale déduite de l'ensemble des deux groupes (vents forts et vents modérés) donne 339^{m},8, mais en raison des forts écarts que comporte le premier groupe, nous considérons comme plus exact le nombre déduit du second groupe.

Les observations semblent montrer enfin, que le vent étant évalué par ballons sondes, la vitesse déduite est plus grande lorsque le vent souffle dans le sens de la propagation du son, que dans le cas contraire. La différence, *très faible* et négligeable avec les vents modérés, augmenterait ensuite assez rapidement avec les vents forts. Ce caractère doit être attribué à la forme oscillatoire du vent (rafales).

sèche au bain-marie, puis on calcine fortement, et l'on remarque qu'alors le platine qui, d'abord, était noir, finit par prendre le même aspect que le creuset.

Cette *réduction par l'alcool* se fait seulement en présence du platine métallique. Une solution semblable, chauffée avec de l'alcool dans un vase de porcelaine ou de verre, ne se réduit pas, même après plusieurs heures. Cette réduction se fait dans des solutions diluées de chloroplatinate de potassium, de 0,25 à 0,30 pour 100 tout au plus; dans des solutions plus concentrées, elle est lente et incomplète, le platine n'adhérant qu'en partie au creuset. Quand on a de plus grandes quantités de précipité, on dissout dans de l'eau et l'on complète à 250^{cm^3} ou à 500^{cm^3}, selon la quantité de précipité, de sorte que la solution ait la couleur des urines normales, puis on en prend de 20^{cm^3} à 25^{cm^3} à l'aide d'une burette (selon la capacité du creuset dont on dispose).

Le formaldéhyde réduit aussi dans les mêmes conditions le chloroplatinate, mais bien plus lentement et avec un dépôt n'adhérant pas complètement. L'alcool allylique ne produit aucune réduction, même en présence de platine métallique ([1]).

Voici quelques résultats de dosages obtenus par cette méthode. Nous avons fait usage de chlorure de potassium d'une pureté garantie, parfaitement desséché, et de poids en platine normaux.

	Durée de la réduction en minutes.			
	30.	20.	30.	30.
	g	g	g	g
Poids du creuset platiné........	20,5218	20,5355	20,5510	20,5566
» avant le dépôt..	20,4962	20,5218	20,5355	20,5510
Platine....	0,0256	0,0137	0,0155	0,0156
Poids de KCl trouvé..........	0,01949	0,0104	0,011802	0,01188
» analysé..........	0,0195	0,0106	0,0118	0,0119

La différence dans la deuxième expérience est due à la durée insuffisante du chauffage.

Enfin nous avons pris $0^g,2004$ de KCl auquel correspond $0^g,12659$

([1]) E. Billmann (*Berichte*, t. 33, 1900, p. 2197) trouve que l'alcool allylique ne réduit pas les sels de platine même à l'ébullition.

de K^2O: c'est à peu près le cas le plus fréquent pour les engrais. Le précipité a été dissous et amené à 250^{cm^3} d'eau, et l'on a pris 20^{cm^3} chaque fois.

Poids de KCl analysé....		0,2004 g	correspondant à K^2O....	0,12659 g
» trouvé	a.	0,19987	»	0,12626
	b.	0,2008	»	0,12686

	a.	b.
Poids du creuset platiné..................	20,6078 g	20,6493 g
» avant le dépôt........	20,5868	20,6282
Platine..................	0,0210	0,0211

On effectue aussi quantitativement la réduction du chloroplatinate d'ammonium dans les mêmes conditions, mais cette méthode ne présente aucun avantage, étant donné que le précipité se réduit facilement par calcination.

Si l'on veut polir le creuset, on frotte avec les cendres d'un manchon Auer, et il perd alors $0^g,001$ tout au plus de son poids. C'est aussi un procédé pour réparer des creusets.

GÉOLOGIE. — *Une plage soulevée aux environs de Saint-Malo.* Note de MM. **Ph. Dautzenberg** et **Gustave Dollfus**, présentée par M. H. Douvillé.

L'attention de l'Académie a été fréquemment attirée, pendant ces derniers temps, sur la stabilité des lignes des côtes et sur les mouvements de submersion et d'émersion des plages du littoral français.

Nous venons de découvrir près de Saint-Malo (Ille-et-Vilaine), les restes d'un ancien rivage qui est aujourd'hui fort loin de toute atteinte des flots. Ce gisement est situé au hameau de Saint-Joseph, à mi-distance entre Saint-Servan et Paramé, au pied de la falaise de Belle-Vue, élevée de 30^m à 35^m, et à l'entrée d'une vaste carrière de granit gris, du type de celui de Vire. Le chemin d'accès à cette grande exploitation montre dans une petite tranchée un dépôt sableux, coquillier, avec graviers et chargé de galets; son épaisseur est de $1^m,20$, allant rapidement en diminuant vers la falaise; il repose directement sur la roche granitique faiblement altérée, et il est couvert par une masse limoneuse brune, de $1^m,50$ à 2^m d'épaisseur, renfermant à la base de forts blocs anguleux de granit qui paraissent provenir de quelque éboulement ancien.

L'altitude du gisement de Saint-Joseph peut être donnée avec quelque précision, car la route qui y conduit traverse à moins de 80^m, et à même altitude, le passage à niveau du chemin de fer de l'État de Saint-Malo à Dol, qui est coté $7^m,67$; ce nivellement de la voie a pour origine le niveau moyen de la mer au Havre. C'est donc une terrasse de 8^m d'altitude qui est envisagée. Dans l'explication de la carte géologique de Dinan, due à M. Ch. Barrois, on trouve l'indication d'autres plages soulevées dans la même région, aux Escarets, à la pointe Muret (Port-Vieux), dans l'anse de Saint-Cast, à une altitude de 5^m à 6^m au-dessus des plus hautes eaux actuelles; M. Génée (*in* Alexandre Chédremont) a décrit un banc d'huîtres bivalves (*Ostrea edulis*) au Vivier, dans le cordon littoral des Polders de Dol, à 10^m d'altitude.

Il n'est pas inutile de rappeler que, à l'époque historique, Saint-Malo a été, comme l'île d'Aaron, reliée au continent par un pont avec chaussée du côté du Sillon et que l'évêché qui était alors à Aleth (aujourd'hui Saint-Servan) y a été transféré en 1172 pour plus de sécurité. De grands marécages existaient alors entre Saint-Malo et Saint-Servan, limités par deux buttes de sable : le Grand et le Petit Talard, situées au voisinage de la gare actuelle du chemin de fer et près des bassins nouvellement aménagés; ces marécages sont devenus des prairies sur lesquelles le champ de courses a été établi après assainissement et qui s'avancent jusqu'au pied de la falaise de Saint-Joseph. La distance du rivage est maintenant de 2^{km} à 3^{km} et il semble bien que les documents historiques sont d'accord avec les constatations scientifiques. Dès 1849, Durocher constatait que la côte nord de la Bretagne avait subi « des oscillations, des élévations et des abaissements successifs »; la contribution que nous apportons aujourd'hui ne préjuge en rien de l'existence de périodes antérieures d'envahissement ou d'abandon de la mer dans la même région.

Voici la liste des coquilles de Mollusques recueillies sur l'ancienne plage de Saint-Joseph :

Hædropleura septangularis Mtg.
Tritonium undatum L. (*Buccinum*).
Donovania minima Mtg.
Nassa reticulata L.
» *incrassata* St.
Murex erinaceus L.
Trivia arctica (Sol.) Pult.
Cerithiopsis tubercularis Mtg.
Littorina saxatilis Ol. var. *rudis*.
» *obtusata* L. var. *littoralis*.
Rissoa membranacea Ad. var. *labiosa*.
» *parva* Da Costa.
» » » var. *interrupta*.
» *lilacina* Recluz.
» *lactea* Mich.
» *costata* Ad.

Rissoa striata Ad.
» *cingillus* Mont.
Barleia rubra Mtg.
Peringia ulvæ Penn.
Turbonilla lactea L.
Calyptra chinensis L.
Adeorbis subcarinatus Montagu.
Trochus (*Gibbula*) *magus* L.
» » *cinerarius* L.
» » *umbilicalis* Don.
» *conuloides* Lamk.
» *exasperatus* Penn.
Acmæa virginea Müller.
Patella vulgaris L.
Chiton discrepans Brown.
Ostrea edulis L.
Pecten varius L.
Pectunculus glycimeris Bel.
Nucula nucleus L.
Cardium nodulosum Turt.
» *exiguum* Gmel.
» *edule* L.
Tapes rhomboides Penn.
Axinus flexuosus Mtg.
Loripes lacteus L.
Mactra solida L.

En tout 42 espèces, nombre déjà important, que des fouilles suivies pourraient probablement augmenter. Nous n'observons là aucun élément étranger, mais un ensemble en tout conforme à la faune des baies rocheuses du voisinage; la coloration a cependant disparu presque complètement; nous ne relevons aucune variété spéciale ni aucun changement dans la proportion relative des formes. Cette faune contemporaine se rencontre également dans les plages soulevées des Iles anglo-normandes, d'après David Austed et dans celles du Devonshire, suivant d'autres auteurs anglais.

GÉOPHYSIQUE. — *A propos du refroidissement des globes planétaires.* Note (¹) de M. **Adrien Guébhard**, présentée par M. Douvillé.

Le principe, accepté sans discussion, de la diminution de volume des sphères planétaires par le fait du refroidissement, a dominé, à peu près sans exception, toutes les dissertations et calculs auxquels a donné lieu l'étude de la déformation des sphéroïdes avant celle de leur formation. Or j'ai commencé par remarquer que le fait seul de la naissance d'une croûte superficielle impliquait, pour le liquide constituant, quel qu'il fût, la propriété, qu'ont notoirement l'eau et le fer, d'augmenter au lieu de diminuer de volume au moment du « gel ». Certes, cette croûte, une fois formée, ne tardera pas à rentrer, comme l'eau et le fer, dans la loi commune de la

(¹) Séance du 13 janvier 1919.

contraction par un froid ultérieur. Mais ce refroidissement lui-même sera longtemps retardé par les chutes, avec dégagement de chaleur, puis par la solidification dans les chenaux géosynclinaux, des pluies de condensation des dernières vapeurs demeurées suspendues dans l'atmosphère au moment de l'occlusion de la « protosphère » ; tandis que, par le dessous, la constance de la température de solidification de la base de la « ferrisphère » fait que le refroidissement externe survenant n'agit aucunement sur la croûte, telle qu'elle est, comme sur la surface homogène et continue des théoriciens, mais seulement pour élargir les craquelures et faciliter les extravasations de l'intérieur : nouvel apport qui, à lui seul, suffirait à transformer en augmentation l'insignifiante diminution de volume attribuable aux plus hauts coefficients de contraction des éléments de la lithosphère. Or cet apport se continue encore de nos jours et il s'y ajoute même un accroissement de masse du fait des chutes de météorites. Il est donc certain qu'à aucun moment de l'évolution de notre globe, depuis l'apparition de la croûte, n'a pu se produire le raccourcissement du rayon auquel a été attribuée, entre autres spéculations dépourvues de base, une accélération du mouvement de rotation que démentent les données de l'Astronomie.

Mais auparavant? S'il est clair que, pour passer du néant à quelque chose, une certaine concentration cosmique a été nécessaire, ce fut à une époque où la notion même de volume ne pouvait être applicable, faute de limite séparative entre le centre de condensation et la dégradation des densités jusqu'au zéro de l'espace infini. Le premier des centres doit être un atome lourd, qui, attirant les autres, à commencer par ses semblables, peu à peu capta des trajectoires, les incurva en hélices longtemps asymptotes et, de son cortège accroissant son pouvoir, entraînant sur sa route, en boule de neige, tout ce que rencontrait sa sphère d'attraction, marqua comme d'une trace vide de balayage aspirateur le sillage de son tourbillon satellitaire et créa ainsi la première coupure ségrégationnelle dans l'uniformité primitive du champ des trajectoires rectilignes anciennes assez écartées pour garder chacune leur indépendance. N'est-ce pas le spectacle qu'offrent à nos yeux maintes nébuleuses spirales? Le plus gros, le plus fort de ces noyaux deviendra soleil, et les autres, planètes ou lunes. Mais est-il juste, à cette phase indécise où s'ébauchent à peine une forme, un volume, de faire prédominer l'idée de rétraction thermique sur celle d'attraction gravitationnelle et celle de condensation matérielle sur celle d'extension spatiale?

Celle-ci reprendra d'elle-même sa prépondérance dès que la concen-

tration gazeuse, arrivée au point de faire entrer définitivement dans leurs sphères d'attraction mutuelle, non plus seulement les atomes, mais les molécules du métal le plus grave, en aura fait une première gouttelette infinitésimale, embryon fini d'un monde ayant pris forme. L'effet du refroidissement, à partir de ce moment-là, ne sera-t-il pas de travailler constamment à l'accroissement, en même temps qu'au réchauffement (1) du globule liquide en y faisant tomber, au fur et à mesure des condensations, tous les produits du dégorgement de l'atmosphère ? La même chose se continuera même après que la température superficielle, tombant au-dessous de 3000°, aura précipité au centre, pour y constituer la barysphère (2), tous les métaux lourds solidifiés; et nous avons vu que cela devra continuer même après l'encroûtement de la pyrosphère, et même s'il arrive, comme sur la Lune, que l'épuisement des propriétés foisonnantes du magna amène la rétraction finale de celui-ci sur le noyau et le rappel en dessous de la ferrisphère de ceux des gaz atmosphériques que ne repousserait pas une température encore peu inférieure à 1500°.

Car l'accélération du refroidissement, si elle n'est compensée intérieurement par l'intensité de réactions chimiques nouvelles, se traduira longtemps au dehors par un supplément de condensations aqueuses, probablement supérieures encore en volumes à la faible rétraction lithosphérique. Survienne le zéro, et il se pourra encore que l'eau, soit qu'elle ait été

(1) La solution de cette antithèse ne pourrait-elle se trouver dans le fait que l'action de la chaleur, ainsi que je l'ai démontré pour la lumière (*Comptes rendus*, t. 138, 1904, p. 491; t. 141, 1905, p. 559; etc.), au lieu d'être une fonction linéaire de l'état vibratoire qui la provoque, serait elle-même ondulatoire et pourrait, par certains paroxysmes, retomber au zéro du point de départ, l'exagération du mouvement thermique aboutissant à en annuler l'effet calorifique, comme l'excès d'action lumineuse l'effet photographique?

(2) L'hiatus qui se remarque entre les températures de fusion (et par conséquent de solidification) des métaux du groupe rhodium-tungstène et tous les autres, n'indique pas seulement que tous ceux d'entre les premiers qui se trouvaient à l'état libre dans le magma avaient dû s'en séparer bien avant l'apparition de la protosphère, mais encore que cette précipitation avait dû se faire à l'état solide, par suite de la tendance des courants de convection, ainsi que des marées alors encore importantes, à uniformiser la température générale de la masse fluide. Aussi peut-il paraître bien téméraire de voir appliqués à l'agglomérat de bloc métalliques, même plastifiés par les hautes pressions, que dut être la barysphère, les calculs de déformation d'une masse fluide ou visqueuse auxquels se sont complu certains mathématiciens.

toute résorbée à la place du magma, soit qu'il en reste en haut à l'état de liberté ou d'imbibition, reprenne pour un temps un rôle de foisonnement compensateur. Mais comment suivre dans la marche, vers le zéro absolu, les effets réels d'un refroidissement qui, en surface, n'ayant pas même 300° à parcourir, affectera à peine les faibles coefficients de dilatation des minces coques rocheuses, tandis qu'en bas, une chute de plus de 1700° raccourcira notablement les rayons de courbure des voûtes métalliques fortement épaissies qui, privées de leur soutien liquide, n'ont plus d'équilibre qu'en se calant les unes contre les autres? Est-il permis d'envisager dans l'effondrement final et l'accélération consécutive de la rotation, une cause de dispersion des fragments de croûte dans l'espace, par la seule force centrifuge et de réduction finale d'un astre à l'état que montre Mercure, sans explosion proprement dite? Tout ce qui reste bien établi c'est que, jusqu'au dernier moment, l'effet constant du refroidissement a été de contribuer à la croissance et non au rétrécissement de l'astre. Toutes les conséquences tirées de l'hypothèse contraire sont à reprendre par la base, en tenant compte des données physiques nouvelles que j'ai exposées.

PALÉOBOTANIQUE. — *Sur la flore du bassin houiller de Lyon* (bassin houiller du Bas-Dauphiné). Note de M. **Paul Bertrand**, présentée par M. Pierre Termier.

Les nombreux sondages, exécutés en vue de rechercher le prolongement du bassin de Saint-Étienne au sud-est et à l'est de Lyon [1], ont établi que l'épaisseur du terrain houiller dans cette région peut dépasser 700^{m}. Le terrain houiller de ce nouveau bassin paraît comprendre trois groupes de dépôts, qui se succèdent graduellement de haut en bas sans solution de continuité :

3. *Grande formation poissonneuse et bitumineuse de Genas-Chassieu.* — Schistes bitumineux alternant avec quelques bancs de grès fins.

2. *Formation charbonneuse.* — Schistes et grès avec couches de houille interstra-

---

(1) Depuis 1890, l'exploration méthodique du bassin du Bas-Dauphiné a été poursuivie à la demande et sous la direction scientifique de MM. Friedel et Termier. Ces deux maîtres ont bien voulu me confier, depuis 1915, l'étude des plantes fossiles recueillies dans les sondages.

tifiées. *Toits* riches en empreintes végétales. *Murs* (= sols de végétation) fréquents.

1. *Formation de base.* — Prédominance de roches grossières : grès, poudingues (ou *grattes*) et conglomérats variés. Schistes subordonnés.

La formation n° 1 repose partout sur les terrains cristallophylliens, en complète discordance. On a recueilli des plantes fossiles sur toute l'épaisseur du terrain houiller. La formation n° 2 a fourni le plus grand nombre d'empreintes. Dans la formation bitumineuse, les débris végétaux déterminables sont rares et à l'état de fragments; ils sont plus rares encore dans la formation de base.

Les plantes houillères, recueillies dans tous les sondages sans exception, appartiennent toutes à la *flore de Saint-Etienne* (1). Parmi les espèces les plus caractéristiques je citerai :

Odontopteris Reichiana Gutbier, *Callipteridium pteridium* Schl., *Nevropteris cordata* Br., *Linopteris Brongniarti* Gutb., *L. Germari* Gieb., *Pecopteris lepidorachis* Br., *P. hemitelioides* Br., *P. Bioti* Br., *P. feminæformis* Schl., *Cordaites lingulatus* Gr.E., *Poacordaites linearis* Gr.E.

Je mentionnerai en outre la présence de : *Mixoneura auriculata* Br., *Sphenophyllum longifolium* Germar et *S. angustifolium* Germ.

La formation bitumineuse de Genas n'a fourni jusqu'ici aucune des espèces caractéristiques de la zone à *Odontopteris minor* Br. (= série d'Avaize). Par contre, on trouve des *Walchia* (*W. piniformis* Schl., *W. aff. imbricata* Schimper), rares dans la formation n° 2, fréquents dans les schistes bitumineux (presque tous les sondages, où les schistes bitumineux ont été rencontrés, ont fourni des *Walchia*). Or Grand'Eury a établi que les *Walchia*, apparus dans l'étage intermédiaire entre Rive-de-Gier et Saint-Etienne, sont déjà assez fréquents dans les couches moyennes et supérieures de Saint-Etienne. Les *Walchia*, pas plus que le facies bitumineux, ne sont caractéristiques du Permien.

Le Permien n'est pas représenté dans le bassin de Lyon; le Stéphanien supérieur (série d'Avaize) non plus. Les parties les plus élevées de la formation bitumineuse de Genas-Chassieu pourraient tout au plus représenter la formation bitumineuse de Montrambert; cela est encore très

(1) Voir Paul Bertrand, *Les grandes divisions paléontologiques du Stéphanien du bassin de la Loire* (*Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 689); *Caractères distinctifs des flores houillères de Saint-Étienne et de Rive-de-Gier* (*Ibid.*, p. 760).

douteux; elles sont plus probablement inférieures à l'horizon de Montrambert.

Inférieurement, le terrain houiller de Lyon peut être délimité avec non moins de netteté. La flore de Rive-de-Gier n'a été rencontrée jusqu'ici dans aucun sondage. Une seule Sigillaire cannelée (*Sigillaria Sillimani* Br.) a été recueillie dans le sondage de Manicieu-Miplaine. Mais nous savons que les Sigillaires cannelées sont encore assez fréquentes dans l'étage intermédiaire et que certaines formes persistent dans les couches de Saint-Étienne.

En l'état actuel de nos connaissances, le Tableau ci-après me paraît donner une idée, suffisante pour le moment, de l'équivalence des assises entre le bassin houiller de Lyon et celui de Saint-Étienne.

Saint-Étienne.		Lyon.
Grande formation poissonneuse et bitumineuse de Montrambert		
Série de Saint-Étienne	Faisceau de la 3e couche Faisceau de la 8e couche	3. Grande formation poissonneuse et bitumineuse de Genas-Chassieu
	Faisceau des 13e-15e couches	2. Formation charbonneuse
Étage intermédiaire entre Saint-Étienne et Rive-de-Gier	Gratte de Saint-Chamond	1. Formation de base (grès et poudingues variés)
	Conglomérat de Grand-Croix et de Rive-de-Gier	

Les couches de houille de Lyon représenteraient les couches inférieures de Saint-Etienne. Les schistes bitumineux de Genas représenteraient probablement les couches supérieures. En d'autres termes, la série de Saint-Etienne est en partie à l'état bitumineux dans le bassin de Lyon.

Pour retrouver le facies charbonneux sur toute l'épaisseur de l'assise n° 3, il faudrait, en principe, se rapprocher des bords du bassin.

La présence de la flore de Saint-Etienne a été reconnue jusque dans le sondage le plus oriental, celui de Torcieu, situé à 5^{km} à l'est d'Ambérieu.

D'autre part, les couches d'anthracite de Communay renferment dans leurs toits, non pas la flore de Rive-de-Gier, comme on l'avait cru jusqu'ici, mais celle de Saint-Etienne. Cette flore est très semblable à celle de la Chazotte et à celle de Saint-Chamond (Mine Rigaudin), c'est-à-dire à la flore des 13e et 15e couches de Saint-Etienne. Il faut signaler notamment l'abondance du *Cordaites lingulatus* Gr. E. et des Fougères (*Odontopteris*,

Callipteridium et *Pecopteris*), énumérées ci-dessus. Le terrain houiller de Communay représente donc réellement, sur la rive gauche du Rhône, le début du bassin houiller de Lyon. Entre Communay et Torcieu, la distance est de plus de 50^{km}.

PALÉONTOLOGIE. — *Relations entre les migrations du genre* Hipparion *et les connexions continentales de l'Europe, de l'Afrique et de l'Amérique au Miocène supérieur.* Note de M. L. Joleaud, présentée par M. Émile Haug.

Dans la belle monographie qu'il vient de consacrer aux Équidés oligocènes, miocènes et pliocènes de l'Amérique du Nord, M. Osborn a réparti les espèces d'*Hipparion* du Nouveau Continent en quatre groupes ([1]). Les groupes d'*H. occidentale* Leidy (*Neohipparion* Gidley) et d'*H. gratum* Leidy, qui ont tous deux le protocone (colonnette interne) des molaires supérieures à section très allongée, sont propres à l'Ouest de l'Amérique. Au contraire, les groupes d'*H. plicatile* Leidy et d'*H. venustum* Leidy, qui possèdent un protocone à section circulaire ou légèrement ovale, comprennent toutes les espèces pontiennes de la Floride et de la Caroline du Sud, de l'Europe, de l'Asie et de l'Afrique. Ces importantes observations semblent contredire l'hypothèse, émise d'ailleurs très dubitativement, d'une migration d'*Hipparion* au Miocène supérieur de l'Amérique du Nord en Europe par la voie asiatique ([2]). En réalité, ce serait en partant de la Floride que ces Équidés auraient directement gagné l'Europe.

Il semble bien démontré que les arrivées de Mammifères d'origine nord-américaine en Europe eurent lieu grâce à une connexion continentale dans la région nord-atlantique à l'Éonummulitique et au Néonummulitique, avec une interruption au Mésonummulitique. C'est, par contre, avec doute qu'a été admise, pour les migrations néogènes, une voie empruntant, entre l'Amérique et l'Europe, les terres asiatiques, à la faveur d'un isthme situé sur l'emplacement du détroit de Behring. Cependant, si la communication nord-atlantique a cessé d'exister au Miocène, du moins « l'analogie est telle entre les faunes néogènes marines des Antilles et celles de la Méditerranée, que l'on est en droit de conclure à l'existence d'une traînée d'îles et de

---

([1]) *Memoirs of the American Museum of Natural History*, new series, II, 1, 1918, p. 175 et 192.

([2]) Ch. Depéret, *Comptes rendus*, t. 143, 1906, p. 1120.

faibles profondeurs entre les deux régions, au moins au début de la période. Par contre, rien ne nous autorise à supposer la persistance d'une communication entre le Brésil et l'Afrique, qui aurait permis des échanges entre les faunes terrestres des deux continents » ([1]).

La liaison directe du Nouveau et de l'Ancien Monde, qui permit à *Hipparion* d'envahir l'Europe au Pontien, ne semblant avoir pu s'effectuer ni par le continent Nord-Atlantique, ni par le continent Africano-Brésilien, a dû nécessairement emprunter la chaîne d'îles et de hauts fonds qui, allant des Antilles à la Méditerranée, correspondait peut-être à un géanticlinal secondaire de la zone axiale du grand géosynclinal transverse. Or l'on sait que, au Sahélien, la mer néogène a présenté son maximum de régression dans les géosynclinaux : la Méditerranée était alors réduite à d'étroits chenaux, et il en était vraisemblablement de même de l'Océan entre le Maroc, l'Ibérie, les Antilles et la Floride. Cette dernière région, qui faisait auparavant partie intégrante de la chaîne des îles atlantiques ([2]), a été adjointe au continent Américain à la fin de la période du Néogène moyen ([3]). Au milieu des chenaux de la mer sahélienne devait se dresser ainsi une ligne de terres émergées à la faveur desquelles *Hipparion* put gagner l'Europe, peut-être en plusieurs étapes.

Au Pontien, lorsque *Hipparion* arriva dans l'Ancien Continent, l'Europe occidentale et l'Afrique du Nord étaient séparées par la mer sahélienne. Or ce genre d'Equidé, représenté par *H. gracile*, apparaît simultanément au nord et au sud de la Méditerranée. Sans doute alors les terres émergées de l'Atlantique central assuraient, au moins par intermittence, des communications entre l'Europe occidentale et la Berbérie. Grâce à elles, *H. gracile* put se répandre simultanément dans ces deux contrées. C'est probablement aussi par cette voie que sont venus en France et en Allemagne, à la fin du Miocène moyen (Tortonien, Sarmatien), divers Rongeurs aujourd'hui essentiellement africains, tels que *Hystrix*, qui est d'origine sud-américaine, et *Xerus*, dont un type très primitif a sa distribution géographique actuelle liée, au Maroc, à celle de l'Arganier, Sapotacée proche parente de Végétaux des îles atlantiques ([4]).

Ces faits d'ordre zoogéographique n'avaient pas, semble-t-il, attiré parti-

---

([1]) E. Haug, *Traité de Géologie*, p. 1722.

([2]) Mathew *in* Osborn, *The Age of Mammals*, 1910, p. 245, fig. 124.

([3]) Dall, *Bull. of the U. S. Geol. Surv.*, n° 84, 1892.

([4]) L. Joleaud, *Bull. Soc. Zool. France*, t. 43, 1918, p. 83.

culièrement l'attention jusqu'à aujourd'hui et l'étude des Mammifères avait été quelque peu délaissée dans les recherches paléogéographiques sur l'Atlantique central. M. Louis Germain, dans un remarquable article publié récemment (¹) sur cette question, cite seulement les remarques de Scharff (²) sur les Mammifères des Açores, qui sont en grande partie indigènes et seraient venus d'Europe par une communication terrestre directe; le Lapin lui-même ne serait qu'une forme « relicte », dont l'origine devrait être recherchée dans le Nouveau Monde (³). Or je ferai remarquer que *Lepus* et *Hipparion* sont précisément les éléments de la faune pontienne d'Europe qui sont d'origine nord-américaine (⁴).

M. Germain est arrivé à cette conclusion que les Açores, Madère, les Canaries et les îles du Cap Vert, autrefois réunies, constituaient une terre émergée qui se reliait au Portugal, au Maroc, à la Mauritanie, à la Floride, aux Antilles, au Venezuela et qui se serait effondrée en plusieurs temps.

M. Louis Gentil (⁵), au cours de ses belles explorations dans le Sud marocain, a pu recueillir des données géologiques précises sur les relations de cette terre émergée et de l'Afrique. Il a constaté que les plissements du Haut Atlas s'ennoyent sous le détroit qui sépare le Maroc des Canaries. Le chenal est donc plus jeune que ces plissements qui ont affecté le Plaisancien.

Ces données, rapprochées de celles recueillies par les géologues américains, permettent de conclure à l'existence très probable, au Miocène supérieur, entre l'Ancien et le Nouveau Monde, de terres émergées, par lesquelles *Hipparion* et divers autres genres de Mammifères ont pu venir d'Amérique en Europe et en Afrique.

MÉTÉOROLOGIE. — *Influence de la vitesse du vent sur la distribution verticale et les variations des éléments météorologiques dans les couches basses de l'atmosphère.* Note de M. C.-E. **Brazier**, présentée par M. E. Bouty.

J'ai utilisé, pour cette recherche, les observations faites, par les soins du Bureau central météorologique, tant dans le jardin et sur la terrasse de cet

---

(¹) *Annales de Géographie*, t. 22, 1913, p. 222.
(²) *Proc. R. Irish. Ac. Dublin*, t. 24, sect. B, 1903, p. 276.
(³) Osborn, *Ann. New York Ac. of Sc.*, t. 13, 1900, p. 58.
(⁴) Depéret, *loc. cit.*
(⁵) *Le Maroc physique*, 1912, p. 109-122.

établissement, qu'aux divers étages de la Tour Eiffel. Pour ne pas avoir à tenir compte de la nébulosité et de ses variations, dont je me propose de rechercher plus tard l'influence, j'ai choisi un certain nombre de journées de printemps où le temps est resté constamment clair et où le vent a soufflé d'entre Nord et Est de façon très sensiblement continue. Ces journées, au nombre de 53, appartiennent toutes au mois d'avril; elles ont été réparties en trois groupes comprenant respectivement : 9 jours où la vitesse moyenne du vent à la Tour Eiffel est restée inférieure à 6^m par seconde, 21 jours où cette vitesse a été comprise entre 6^m et 10^m, et 23 jours où elle a dépassé 10^m.

Le Tableau ci-dessous donne, pour chacun de ces trois groupes, la moyenne des 24 heures des principaux éléments météorologiques à diverses hauteurs :

	Vitesse du vent (moyenne des 24 heures).			Pression barométrique (moyenne des 24 heures).			
Station	B. C. M.	T. Eiffel.	Rapport de la vitesse T. E. à la vitesse B. C. M.	B. C. M.	T. Eiffel.	Pression à l'altitude $33^m,4$ calculée à l'aide des observations faites à $312^m,9$.	Différence entre la pression observée à $33^m,4$ et la pression calculée.
Altitude	»	»		$33^m,4$.	$312^m,9$.		
Hauteur au-dessus du sol	21^m.	302^m.		»	»		
	m	m		mm	mm	mm	mm
Vent faible	0,9	4,4	5,0	761,4	736,5	761,3	0,1
Vent modéré	2,1	8,1	3,9	761,2	736,2	761,0	0,2
Vent fort	3,7	11,5	3,1	761,9	736,5	761,6	0,3

	Tension de la vapeur d'eau (moyenne des 24 heures).			Température (moyenne des 24 heures).				
Station	P. S. M. (¹)	T. Eiffel.	Rapport de la tension T.E. à la tension P. S. M.	B. C. M.		Tour Eiffel.		
Hauteur au-dessus du sol				Jardin,	Terrasse,	2ᵉ pl.-f.	Interᵉ	Sommet
	2^m.	302^m.		$1^m,6$.	18^m.	123^m.	197^m.	302^m.
	mm	mm		°	°	°	°	°
Vent faible	5,32	4,15	0,78	14,1	15,1	14,8	14,6	14,6
Vent modéré	5,37	4,50	0,84	14,5	14,7	13,8	13,6	13,5
Vent fort	4,91	4,28	0,87	12,4	12,3	11,0	10,6	10,0

(¹) Parc Saint-Maur.

Le rapport des vitesses moyennes du vent au sommet de la Tour Eiffel et au Bureau central météorologique décroît à mesure que la vitesse augmente. Cependant, en y regardant de plus près, on trouve que cette augmentation du rapport ne provient que des observations nocturnes. Pendant la journée, en effet, de 10 heures à 16 heures, le rapport des vitesses du vent à 300^m et à 21^m au-dessus du sol est sensiblement constant, voisin de 2,0 et indépendant de la vitesse moyenne du vent (moyenne des 24 heures).

La pression au niveau de la cuvette du baromètre du Bureau central, calculée à l'aide des observations faites à la Tour Eiffel, est plus basse que la pression observée réellement à ce niveau. La différence entre les nombres calculés et les nombres observés croît avec la vitesse moyenne du vent. L'étude de la variation diurne et de la variation annuelle de cette différence révèle une analogie remarquable avec les variations diurne et annuelle de la vitesse du vent au voisinage immédiat du sol. Il semble donc possible d'admettre qu'une bonne partie de l'excès des pressions mesurées au Bureau central météorologique par rapport à celles que l'on observe 280^m plus haut est bien attribuable à un effet dynamique et résulte des mouvements forcés de l'air des couches basses causées par l'action du vent sur les obstacles qui recouvrent la surface du sol. Jusqu'ici, aucune preuve expérimentale de l'exactitude de cette hypothèse n'avait été donnée à ma connaissance.

Par vent faible et par vent modéré, la température moyenne de l'air est à peu près constante au-dessus de 125^m, tandis qu'au-dessous de ce niveau, elle passe par un maximum à une hauteur d'autant plus faible que la vitesse du vent est plus grande. L'intensité de ce maximum paraît d'autant plus prononcée que la vitesse du vent est plus petite. Par vent fort, ce maximum disparaît et la distribution des températures moyennes se rapproche de la distribution adiabatique; tandis que, par vent faible, la température moyenne à 300^m est de $0°,5$ plus élevée qu'au sol, par vent fort, elle est plus basse de $2°,4$.

Un examen rapide de l'amplitude des variations diurnes de la température aux diverses hauteurs conduit à des conclusions intéressantes. A des hauteurs supérieures à 150^m, le rapport de l'amplitude de la variation diurne de la température à celle qui est observée à $1^m,6$ au-dessus du sol, croît très nettement avec la vitesse moyenne du vent. A 302^m, ce rapport qui, par vent faible, est un peu inférieur à 0,5, atteint presque 0,7 par vent fort. *Les variations de température observées près du sol se font donc sentir jusqu'à une altitude d'autant plus élevée que la vitesse moyenne du vent est plus grande.*

De plus, si, à défaut de mesures directes de l'insolation, il est légitime d'admettre que, dans chacun des trois groupes des journées que j'ai considérés, la quantité de chaleur envoyée par le Soleil a été la même, nous sommes amenés aux conclusions suivantes :

1° *Pour une variation diurne donnée de la quantité de chaleur envoyée au sol par le Soleil, l'amplitude de la variation diurne de la température de l'air au voisinage immédiat de la surface terrestre est plus forte par vent faible que par vent fort.*

2° *A partir d'un certain niveau, dont la hauteur peut varier avec la saison et le lieu d'observation et qui, en avril et au-dessus de Paris, est inférieur à* 200^{m}, *l'amplitude de la variation diurne de la température de l'air croît, toutes choses égales d'ailleurs, avec la vitesse du vent.*

3° *Il semble donc que, dans le cas où nous nous sommes placés, l'on puisse conclure à l'existence d'une certaine couche d'air située à une hauteur relativement assez faible au-dessus du sol et dans laquelle la variation diurne de la température est indépendante de la vitesse du vent.*

BOTANIQUE. — *Développement de l'anthère et du pollen des Labiées.* Note de M. Paul Guérin, présentée par M. Guignard.

Les observations de Warming sur le *Mentha aquatica* L. et nos récentes recherches concernant les Sauges [1] constituent, à notre connaissance, les seules données qu'on possède actuellement sur le développement de l'anthère et du pollen chez les Labiées. C'est dans le but de combler cette lacune qu'une étude a été poursuivie dans cette famille, sur 60 espèces environ réparties en une quarantaine de genres.

Quelle que soit, chez les Labiées, l'espèce considérée, plusieurs cellules de la jeune anthère, voisines de l'épiderme, situées dans les quatre régions correspondant aux futurs sacs polliniques, se subdivisent transversalement pour isoler, vers l'intérieur, suivant le processus ordinaire, les cellules-mères primordiales du pollen. Les nouvelles cellules sous-épidermiques se cloisonnent à nouveau, parallèlement à l'épiderme; des deux assises ainsi formées, l'interne donnera l'assise nourricière et l'externe se dédoublera

---

[1] Paul Guérin, *Sur l'étamine et le développement du pollen des Sauges* (*Comptes rendus*, t. 165, 1917, p. 1009).

pour former l'assise transitoire et l'assise mécanique. Ce dédoublement de l'assise externe est général chez toutes les Labiées que nous avons examinées, et, même dans les Sauges où nous avions cru primitivement à un cloisonnement de l'assise interne, pour isoler l'assise nourricière, la règle est la même.

En dehors de l'assise nourricière, la paroi de l'anthère ne comporte donc, chez les Labiées, indépendamment de l'épiderme, que deux assises cellulaires.

Les cellules-mères primordiales, tout en se cloisonnant radialement, ne subissent dans bien des cas aucune division tangentielle. Devenues les *cellules-mères définitives* du pollen, elles se montrent alors disposées, sur une section transversale de l'anthère, en une seule assise formant un arc plus ou moins ouvert (*Lavandula*, *Ajuga*, *Marrubium*, *Hyssopus*, *Glechoma*, *Rosmarinus*, div. Sauges, etc.). D'autres fois, et ce cas un peu moins fréquent semble surtout se rencontrer dans la tribu des Stachydées, les cellules-mères primordiales se subdivisent parallèlement à la surface de l'épiderme, de façon à donner deux rangées de cellules-mères du pollen (*Scutellaria*, *Melittis*, *Stachys*, *Betonica*, *Leonurus*, *Galeobdolon*, *Ballota*, div. Sauges, etc.).

La division des cellules-mères, pour donner naissance aux quatre grains de pollen, n'offre aucune particularité.

Entre les branches de l'arc de cellules-mères du pollen, le parenchyme du connectif forme un bourrelet d'autant plus développé et plus proéminent à l'intérieur du sac pollinique que ces branches sont plus longues et leurs extrémités plus rapprochées. Désigné par A. Chatin (1) sous le nom de *placentoïde*, ce bourrelet parenchymateux a été rencontré par lui dans un grand nombre de Gamopétales, dont une demi-douzaine de Labiées. Nos observations sur ce point permettent de conclure que, dans cette famille, le placentoïde existe dans toutes les espèces, mais à des degrés d'accroissement très divers. A peine marqué dans les *Ocimum*, *Mentha*, *Marrubium*, par exemple, il s'est montré bien développé dans la grande majorité des genres étudiés et en particulier dans les *Rosmarinus*, *Melittis*, *Galeobdolon*, *Eremostachys*, où il pénètre si profondément dans le sac pollinique qu'il le subdivise presque en deux cavités distinctes.

Les cellules nourricières ne comportent qu'une seule assise; le *Scutellaria*

---

(1) Ad. Chatin, *De l'Anthère*, p. 45-50, pl. XVII; Paris, 1870.

Columnæ All. est l'unique espèce qui nous ait offert, par places, un dédoublement de ces cellules. De toutes les Labiées étudiées, le *Glechoma hederacea* L. est celle qui nous a paru posséder les cellules nourricières les plus volumineuses. L'allongement radial de ces cellules, très marqué chez les *Phlomis*, *Eremostachys*, etc., dans la région voisine de l'épiderme, est surtout fréquent chez les éléments qui tapissent le placentoïde. Dans les *Scutellaria* et *Teucrium*, en particulier, les cellules nourricières forment, de même que chez les Sauges, un véritable éventail à la surface de cet organe.

Les cellules de l'assise nourricière ne possèdent jamais moins de deux noyaux, nés par karyokinèse (souvent 3 et même 4 noyaux chez *Lamium maculatum* L., *L. garganicum* L.). Leur résorption, avec celle des cellules de l'assise transitoire, est suivie de la disparition, plus ou moins hâtive suivant les espèces, des placentoïdes.

Il est à remarquer que l'oxalate de calcium, qui est plutôt rare dans les organes végétatifs des Labiées, surtout à l'état de macles, abonde, sous cette forme, dans le parenchyme du connectif, chez plusieurs espèces (*Prasium*, *Leonotis*, *Marrubium*, *Galeopsis*, *Phlomis*, etc.).

Un certain nombre de Labiées sont pourvues, sur leurs anthères, de glandes sécrétrices que Delpino (¹) croit, bien à tort, capables d'enduire l'insecte visiteur de la fleur d'une matière gluante qui lui faciliterait le transport du pollen. Etudiées par Correns (²), chez les Sauges, ces glandes ont été simplement mentionnées par J. Briquet (³), sans indication des variations qu'elles peuvent offrir, d'une espèce à l'autre, tant au point de vue de leur nombre que de leur développement.

Complètement absentes, ou en tout cas excessivement rares chez beaucoup d'espèces (*Hyssopus*, *Melissa*, *Rosmarinus*, *Galeobdolon*, *Dracocephalum Moldavica* L., *Ocimum Basilicum* L., etc.), assez nombreuses chez d'autres, où on ne les rencontre toutefois que dans la région voisine du point d'insertion du filet (*Teucrium*, *Ajuga*, *Scutellaria galericulata* L., etc.), ces glandes sécrétrices sont particulièrement abondantes dans les *Melittis*, *Marrubium*, *Betonica*, etc., où elles sont dispersées sur la face supérieure du limbe staminal, et énormes, en raison de la distension considérable que

(¹) F. Delpino, *Ulteriori osservaz. e consider. sulla dicogamia nel regno vegetale* (*Atti d. Soc. ital. di Sc. nat.*, t. 16, 1873, p. 295).

(²) C. Correns, *Zur Biologie und Anat. der Salvienblüthe* (*Prings. Jahrb.*, t. 22, 1890-1891, p. 232).

(³) J. Briquet, *Les Labiées des Alpes-Maritimes*, 1891, p. 16.

prend leur cuticule [1]. Elles acquièrent, pour la même raison, un très grand développement chez *Plectranthus fruticosus* L'Hérit. Portée par un petit pédicelle, ordinairement bicellulaire, leur tête ne comprend pas moins de 16 cellules chez les Bétoines, de 20 chez *Cedronella canariensis* (L.) Willd.

D'une façon générale, les glandes sécrétrices de l'anthère des Labiées sont beaucoup plus développées que celles que l'on rencontre sur les autres pièces florales. Toutes les espèces d'un même genre n'en possèdent pas : les *Stachys alpina* L., *S. circinata* L'Hérit. en sont pourvus, alors qu'elles font défaut chez *S. palustris* L., *S. sylvatica* L.

RADIOLOGIE. — *L'architecture du calcanéum en stéréoradiographie.* Note [2] de M. L. **Moreau**, transmise par M. d'Arsonval.

La méthode des coupes en série pour l'étude de l'architecture des os donne des résultats insuffisants. Il est difficile de suivre exactement le trajet des travées osseuses, toujours plus ou moins intriquées et donnant aux surfaces obtenues par la section un aspect aréolaire confus. Il est à peu près impossible, par exemple, en étudiant les mailles du tissu spongieux, de reconnaître si la trabéculation est constituée par la bifurcation des fibres d'un même système ou par l'entrecroisement de ces mêmes fibres avec d'autres issues d'un second système indépendant. La radiographie simple, en projetant l'image exacte des fibres et en les individualisant en surface, donne déjà de précieuses indications sur leur trajet, leur agencement et leurs rapports, mais la radiographie stéréoscopique, en soufflant pour ainsi dire l'os et en démêlant les trabécules dans l'espace, aboutit à des résultats beaucoup plus précis touchant son architecture [3].

---

(1) Nous avons recherché en vain, sur l'ovule du *Melittis Melissophyllum* L., du *Marrubium vulgare* L. et des Bétoines, les glandes que M. Guignard a signalées [*Recherches sur le développement de la graine et en particulier du tégument séminal* (*Journal de Botanique*, 1893)], à la surface de cet organe, chez certains *Teucrium* et le *Leonurus Cardiaca* L.

(2) Séance du 6 janvier 1919.

(3) Nous voulons parler de pièces squelettiques et non des os radiographiés à travers les parties molles sur le vivant, les rayons secondaires et la distance enlevant, dans ce dernier cas, trop de netteté aux travées osseuses.

Pour obtenir de bonnes stéréoradiographies, l'os ne doit être ni trop épais ni trop plat. S'il est trop épais, seules sont nettes les travées rapprochées de la plaque, les autres, trop éloignées, sont floues ou à peine visibles; s'il est trop plat, le relief est minimum et même nul. Les meilleurs résultats nous ont été fournis par le calcanéum, os court dont l'architecture, importante au point de vue de la pathogénie des fractures, offre un intérêt d'autant plus vif que l'examen stéréoradiographique apporte quelques modifications aux notions classiques qui lui étaient attachées.

La corticale compacte du calcanéum s'épaissit surtout en deux points : au niveau du thalamus, surface d'appui de l'astragale, et de la face plantaire. La facette articulaire destinée au cuboïde est soutenue par un système de fibres antéro-postérieures autonomes qui, malgré sa résistance, n'atteint pas à la compacité des deux précédents. Dans la région thalamique, l'épaisseur du tissu compact est maxima sous la surface d'articulation postéro-externe, mais elle diminue rapidement au fond du creux calcanéo-astragalien et sur le *sustentaculum tali*. La face plantaire est soutenue par un faisceau de fibres très serrées, fortement tassées au tiers moyen de cette face, et qui s'épanouissent en divergeant en avant et en arrière. Les *travées émanées du thalamus* doivent leur importance à ce qu'elles sont la continuation du pilier postérieur et du pilier antéro-externe de la voûte plantaire. Les plus antérieures se dirigent horizontalement vers la facette cuboïdienne, soutenant les fibres autonomes de la grande apophyse. Les fibres moyennes divergent en éventail vers les faces latérales, atteignant en avant seulement la face plantaire; en arrière, c'est-à-dire au-dessous du centre de la petite apophyse, elles se raréfient, donnant naissance à un tissu vacuolaire à larges mailles qui constitue la cavité médullaire de l'os; cette raréfaction, plus accusée en dedans, rendrait la corticale interne plus vulnérable aux traumatismes, si cette face n'était protégée par l'épaisseur des parties molles et par le surplomb de la petite apophyse. Les fibres postérieures, à peu près horizontales, se dirigent, parallèlement au bord supérieur de l'os, vers la région des tubérosités et vers sa face postérieure.

Ces fibres sont très serrées et se bifurquent sur leur parcours, constituant un réseau à mailles fines et allongées.

Les *fibres plantaires*, condensées ainsi que nous l'avons dit, en un noyau de tissu compact, s'éparpillent en deux pinceaux ténus, l'un antérieur, l'autre postérieur. Le pinceau antérieur, très court, rejoint à travers les fibres sous-thalamiques, le système architectural de la grande apophyse. Le pinceau postérieur, plus important, émet deux sortes de fibres : les unes

inférieures, sensiblement horizontales, se recourbent au niveau des tubérosités plantaires et s'intriquent avec les fibres du système achilléen; les autres, supérieures, montent obliquement en haut et en arrière, mais en même temps qu'elles sont peu nombreuses, elles sont très grêles et se perdent très rapidement parmi les fibres thalamiques. Elles sont loin d'atteindre le bord supérieur de l'os, ainsi qu'il est représenté sur les traités classiques, qui font s'entre-croiser régulièrement, dans les deux tiers postérieurs du calcanéum, les fibres thalamiques et les fibres plantaires. Elles forment une double écharpe qui soutient de chaque côté les faces latérales sur une faible étendue, et ne participent que très peu à l'aspect réticulé de la région rétro-thalamique, aspect dû uniquement à la bifurcation et aux anastomoses des travées issues du thalamus. Dans leur ensemble, les fibres les plus supérieures du système plantaire décrivent un segment de circonférence, dont le centre correspond sensiblement au milieu du corps de l'astragale.

Les *fibres achilléennes*, prenant leur point d'appui sur les tubérosités plantaires, forment un ensemble de travées très serrées, s'incurvant parallèlement à la face postérieure de l'os jusqu'à la crête d'insertion du tendon d'Achille qu'elles renforcent en s'unissant et en constituant une bande de tissu compact. Au-dessus de cette bande, on ne trouve plus sous la corticale que la terminaison des fibres rétro-thalamiques, l'os n'étant protégé à ce niveau que par le tendon d'Achille, dont le sépare une bourse séreuse.

L'architecture du calcanéum éclaire la pathogénie des fractures de cet os, et, à ce point de vue, l'importanee structurale des fibres thalamiques, auprès desquelles les fibres achilléennes et surtout plantaires n'ont dans la trabéculation qu'un rôle tout à fait secondaire, explique dans la plupart des cas l'orientation du trait de fracture. C'est seulement dans certaines lésions par arrachement, dans les décollements épiphysaires, où la contraction violente du triceps sural détache verticalement la partie postérieure de la grosse tubérosité, que le trait de fracture suit la direction des fibres du système achilléen. De même, dans les lésions par écrasement, des fissures secondaires peuvent emprunter le trajet des fibres du système plantaire. Mais dans la plupart des autres cas, le système ogival sous-thalamique règle le cheminement du trait fissuraire. Si la chute sur le pied a lieu d'aplomb, le thalamus compact s'enfonce dans le tissu spongieux qui éclate suivant un rayon plus ou moins oblique. Le point de résistance minima est au niveau du col de la grande apophyse où la trabéculation se raréfie

(cavité médullaire), ce qui explique que la fracture du col s'observe également dans la chute en flexion et en extension. Si quelquefois le trait est perpendiculaire aux fibres rétro-thalamiques, ce qui se produit en particulier pour les fractures de la grosse tubérosité, cette disposition est le résultat de la courbure exagérée et violente de l'ogive thalamique, la grosse tubérosité, renversée par l'hyperflexion du pied, étant comprimée brusquement entre le sol et le corps de l'astragale. Enfin, dans les fractures par arrachement, d'origine exclusivement musculaire, le fragment osseux se décolle toujours en clivant les fibres rétro-thalamiques, qu'il s'agisse d'une fracture de Boyer ou d'une fracture en soufflet secondairement complétée par la rétraction du tendon d'Achille.

MÉDECINE. — *Les résultats du traitement de la gangrène gazeuse par le sérum multivalent.* Note [1] de MM. **H. Vincent** et **G. Stodel**, présentée par M. Charles Richet.

Nous avons fait précédemment connaître la méthode que nous avons employée pour la préparation d'un sérum contre la gangrène gazeuse [2]. Ce sérum antigangréneux a été utilisé à titre *préventif*, chez les blessés atteints de blessures très graves et infectées des membres inférieurs. Nous en avons signalé précédemment les résultats protecteurs très remarquables. Sa valeur *curative* donne, mieux encore, la mesure de son efficacité. Nous en avons déjà publié des exemples [3]. Les chirurgiens qui en ont fait usage nous ont adressé les observations de leurs blessés. Il est donc actuellement possible d'indiquer les résultats généraux de son emploi.

Le sérum provient de chevaux ayant reçu des doses progressivement croissantes de cultures de 16 races microbiennes appartenant aux groupes suivants :

1° *Bac. perfringens* (*Bac. Welchii*) et vibrion septique de Pasteur, agents les plus habituels de la gangrène gazeuse ;

2° *Bac. œdematiens* (Weinberg et Seguin), beaucoup moins fréquent; *Bac. Bellonensis* (Sacquépée);

3° *Bac. putrificus*, *Bac. sporogenes*.

---

(1) Séance du 13 janvier 1919.

(2) H. Vincent et G. Stodel, *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 137, 245 et 305.

(3) *Société de Chirurgie*, 18 juin 1918 (à propos d'une Communication de M. Jalaguier), et *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 305.

Un certain nombre de nos chevaux immunisés contre la gangrène gazeuse le sont simultanément contre le *tétanos*. Il nous paraît que cette dernière pratique doit être généralisée, les plaies septiques étant exposées à la double complication tétanique et gangréneuse. Il y a donc avantage à injecter en une fois, aux blessés, un sérum mixte.

Dans la méthode sérothérapique que nous appliquons, on immunise, en conséquence, le *même cheval* contre l'ensemble des microbes pathogènes les plus communs de la gangrène gazeuse ([1]). En second lieu, la technique spéciale de culture employée permet d'obtenir un antigène riche en endotoxines et en exotoxines, par conséquent capable d'éveiller, dans les meilleures conditions, la formation d'antitoxines chez le cheval fournisseur de sérum. Les doses du sérum injectées aux blessés sont : *dose préventive*, 20^{cm^3}; *dose curative*, 60^{cm^3}, renouvelée après 12 à 18 heures si la première injection n'a pas produit une amélioration suffisante, et continuée, s'il y a lieu.

Sous son influence, les phénomènes généraux et locaux s'amendent rapidement. Le pouls se relève, la fièvre s'abaisse, la sécrétion urinaire augmente, le blessé se réveille, la coloration terreuse du visage disparaît, la langue se nettoie. Le fait le plus curieux est, peut-être, la disparition précoce des gaz qui infiltrent le membre et, chez certains blessés, le thorax ou l'abdomen : cette résorption s'effectue en quelques heures, une fois même, en 4 heures; une autre fois elle était très manifeste déjà 2 heures après l'injection.

Le nombre des malades atteints de gangrène gazeuse et qui ont été traités par notre méthode a été de 81.

Les 81 malades traités par le sérum ont donné 69 guérisons et 12 décès, soit une proportion globale de guérisons de 85,19 pour 100 et une mortalité de 14,81 pour 100. Sur ces décès, il en est 4 qui sont survenus chez des blessés dont la cause effective de la mort, d'après les chirurgiens qui les ont soignés, a été la suivante : tétanos (1 cas); broncho-pneumonie et pleurésie purulente (1 cas); pneumonie lobaire bilatérale avec hépatisation grise (1 cas); phlébite à streptocoques et septicémie (1 cas).

La mortalité par gangrène gazeuse est donc ramenée à 8 sur 81 malades. *Le pourcentage réel des guérisons est ainsi de* 90,13 *pour* 100.

Parmi les blessés traités, il en est un certain nombre qui étaient, au moment où on les a injectés, sur le point de mourir. L'un d'eux a, d'ailleurs, succombé 45 minutes après; deux autres, deux à quatre heures après.

([1]) Le principe de l'immunisation simultanée d'un même animal contre plusieurs microbes (streptocoque et bacille typhique) a été démontré depuis longtemps par l'un de nous (H. VINCENT, *Société de Biologie*, 2 juillet 1892).

Malgré ces conditions si défavorables, nous n'avons pas cru devoir leur refuser le bénéfice possible du traitement sérothérapique. D'autres blessés atteints de gangrène gazeuse, dont l'état était considéré par le chirurgien traitant comme « désespéré », ou qui étaient « littéralement mourants », ont, d'ailleurs, guéri à la suite des injections de sérum (Dr Desmarest, Prof. Jalaguier, Dr Beaussenat, Dr Laurence et Guinoiseau, Dr Vinay, Prof. Lejars, etc...).

Plusieurs des blessés guéris par la sérothérapie étaient atteint d'une infiltration gazeuse ayant envahi le membre jusqu'à sa racine, ou ayant gagné, soit la région abdominale, soit l'hypochondre ou la région fessière, soit le thorax. Dans certains cas, l'amputation ou la désarticulation ont dû être faites en pleins tissus infiltrés de gaz. Les blessés ont guéri (Dr Laurence, Dr Vinay, Dr Jalaguier, Dr Guinoiseau, Dr Beaussenat).

Enfin dans plusieurs observations où l'amputation avait été jugée nécessaire, mais n'a pu être pratiquée en raison de la faiblesse extrême du blessé et du degré trop avancé de ses lésions de gangrène, *le blessé a pu conserver son membre, le processus gangréno-gazeux ayant été enrayé par la sérothérapie* (Dr Colbart, Dr X, de l'Hôpital américain n° 1, Dr Moreno, Dr Tarnowsky, Dr Philardeau, Dr Duvilliers, Dr Sencert, Dr Stern).

Comme exemple de ces succès, nous citerons le cas d'un blessé allemand atteint de plaie par éclat d'obus de la région trochantérienne et fessière gauche, avec éclatement du grand trochanter et infiltration putride et gazeuse de la région fessière, du pli de l'aine et de la paroi abdominale. L'intervention chirurgicale est jugée impossible. L'état est si grave qu'on ajourne même l'incision. On fait un simple pansement antiseptique. Le blessé souille continuellement sa plaie de ses matières fécales.

Injection intraveineuse de sérum. Disparition des gaz au niveau de l'abdomen. Une nouvelle injection faite 22 heures après, amène leur disparition complète, et permet l'incision. Sept jours après, l'amélioration est telle qu'on se contente de pratiquer l'esquillectomie sous périostée. *Guérison avec conservation du membre.*

Les exemples et les statistiques qui précèdent montrent l'efficacité remarquable de la sérothérapie antigangréneuse.

L'emploi systématique, préventif ou curatif du sérum multivalent, actif contre les agents microbiens de la gangrène gazeuse, permet d'apporter une aide très importante à l'intervention chirurgicale et met le plus grand nombre des blessés à l'abri de cette redoutable infection.

A 16 heures l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Commission chargée de dresser une liste de candidats à la place de Membre non résidant vacante par le décès de M. *Duhem* présente, par l'organe de M. le Président, la liste suivante :

En première ligne	M. Wilfrid Kilian
En deuxième ligne	M. Eugène Cosserat
En troisième ligne, ex æquo et par ordre alphabétique	MM. Philippe Barbier Robert de Forcrand Magnus de Sparre

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 16 heures et demie.

É. P.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans les séances d'octobre 1918 (*suite et fin*).

Ministère de l'Instruction publique. *Mission du service géographique de l'armée pour la mesure d'un arc de méridien équatorial en Amérique du sud sous le contrôle scientifique de l'Académie des sciences* (1899-1906); tome 2, fascicule 1, — *Introduction générale aux travaux géodésiques et astronomiques primordiaux de la mission. — Notices sur les stations. Atlas* et *Appendice à l'Atlas : Origine, notation et sens des noms géographiques de l'Atlas, vocabulaires espagnol-français et quichua-français*, par G. Perrier. Paris, Gauthier-Villars, 1918; 2 fasc. 28cm,5. (Présenté par M. le général Bourgeois.)

Trench fever. Report of commission medical research committee American red cross. Oxford, Frederick Hall, 1918; 1 vol. 28cm.

Traité clinique de neurologie de guerre, par Paul Sollier, Chartier, Félix Rose et Villandre. Paris, Félix Alcan, 1918; 1 vol. 28cm. (Présenté par M. Charles Richet.)

L'origine des formes de la terre et des planètes, par Émile Belot. Paris, Gauthier-Villars, 1918; 1 vol. 25cm. (Présenté par M. Termier.)

La gamme majeure des physiciens aux musiciens, par Albert Vilar. Alais, Brabo, 1918; 1 fasc. 22cm,5.

Le cinématographe. Histoire de son invention, son développement, son avenir. Conférence faite à Limoges le 20 avril 1918 par Albert Turpain. Paris, Association française pour l'avancement des sciences, 1918; 1 fasc. 24cm.

Rapport sur les travaux du bureau central de l'Association géodésique internationale en 1917 *et programme des travaux pour l'exercice* 1918. Leide, E.-J. Brill, 1918; 1 fasc. 30cm.

Livellazione degli antichi acquedotti romani, par V. Reina, G. Corbellini e G. Ducci. Roma, Pio Befani, 1917; 1 fasc. 31cm.